DEVOIR SURVEILLÉ 2

Vendredi 16 octobre 2020 - 4h

Le sujet comporte 4 exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Questions en vrac

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Donner la formule donnant $(a+b)^4$.

   (b) Linéariser $\cos^4(x)$.

2. Soit $v_n = \dfrac{\sin(n)+\ln(n)}{4^n-5^n}$. Déterminer la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 9, \ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1} \end{cases}$$

   Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

6. Résoudre l'inéquation $|x^2-5x+2| \leqslant 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

   (a) Recopier et compléter le programme suivant qui permet de calculer $y = f(x)$ avec une boucle for.

```
x = input('x =')
y = 0
for k = ... : ...
    y = ....
end
disp(y)
```

   (b) Que vaut $f(x)$ pour $x \neq 1$? et pour $x = 1$?

   (c) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il calcule $y = f(x)$ avec une instruction if uniquement.

```
x = input('x =')
if ... then
    y = ...
...
...
end
disp(y)
```

Exercice 2

Soit g la fonction définie par
$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

1. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathcal{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3. Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.
   (a) Étudier les variations de h.
   (b) Déterminer le signe de h.
4. En déduire le tableau de variation de g.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

Partie 1 - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x.$$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f. Expliciter les variations de f, en étant le plus précis possible.
4. Justifier que $f(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

Partie 2 - Étude de la suite

6. Écrire un programme en langage Scilab qui demande à l'utilisateur un entier naturel n puis calcule et affiche la valeur de u_n.
7. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
8. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
10. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 4

Soient $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \lambda \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - a\, u_n + \frac{1}{4}a^2 + a.$$

Nous allons étudier deux cas.

Partie I : On suppose dans cette partie que $a = 0$ et $\lambda = \dfrac{2}{3}$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Vérifier que c'est en fait vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = \ln(u_n) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
3. En déduire que le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_n = \dfrac{4}{3 \times 2^{2^n}}$.
   Attention : $2^{2^n} \neq 2^{2n}$.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

Partie II : On suppose dans cette partie que $a = 2$ et $\lambda = 3$.

6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$. *Indication : récurrence inutile.*
8. Montrer, par l'absurde, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
9. Quelle est sa limite ?