Devoir surveillé 2 – Corrigé

Exercice 1

1. (a) $\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$

(b) D'après la formule d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left((e^{4ix}+e^{-4ix}) + 4(e^{2ix}+e^{-2ix}) + 6\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 4\times 2\cos(2x) + 6\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.}$$

2. Soit $n \geqslant 2$.

$$v_n = \frac{\ln(n)}{5^n} \times \frac{\frac{\sin(n)}{\ln(n)} + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}.$$

Or

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{5^n} = 0$ par croissance comparée ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{4}{5} < 1$;
- et enfin, pour $n \geqslant 2$

$$-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{\sin(n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}$$

car $\ln(n) > 0$ (pour $n \geqslant 2$ - on écarte le cas $n = 1$ car $\ln(1) = 0$). Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\ln(n)} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)}$, d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{\ln(n)} = 0$.

Par opérations algébriques, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

3. La suite (u_n) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$(EC) : x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

$\Delta = 25 > 0$ donc (EC) admet deux racines réelles : $r_1 = -3$ et $r_2 = 2$. D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda(-3)^n + \mu 2^n.$$

Or,

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 9 \\ -3\lambda + 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 9 - \mu \\ -27 + 5\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = 5 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 \times (-3)^n + 5 \times 2^n.}$$

4. Méthode 1 : la suite $(3k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique donc d'après le cours

$$\boxed{S_n = \frac{(3\times 1 + 1) + (3n+1)}{2} \times n = \frac{n(3n+5)}{2} = \frac{3n^2+5n}{2}.}$$

Méthode 2 : par linéarité :

$$S_n = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{3n(n+1)+2n}{2} = \frac{n(3n+5)}{2}.$$

5.

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1)$$

par télescopage. Donc $\boxed{T_n = \ln(n+1)}$.

6. Les fonctions $x \mapsto x^2 - 5x + 2$ et $x \mapsto |x|$ étant définies sur $\mathbb{R}$, le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|x^2 - 5x + 2| \leqslant 4 &\iff -4 \leqslant x^2 - 5x + 2 \leqslant 4 \\ &\iff -4 \leqslant x^2 - 5x + 2 \text{ et } x^2 - 5x + 2 \leqslant 4 \\ &\iff x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \text{ et } x^2 - 5x - 2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Étudions les deux trinômes :

- $x^2 - 5x + 6$: $\Delta = 1$ et les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$;
- $x^2 - 5x - 2$: $\Delta = 33$ et les solutions de $x^2 - 5x - 2 = 0$ sont $x_3 = \dfrac{5 - \sqrt{33}}{2}$ et $x_4 = \dfrac{5 + \sqrt{33}}{2}$.
On sait que

$$5 = \sqrt{25} \leqslant \sqrt{33} \leqslant \sqrt{36} = 6 \text{ donc } -\frac{1}{2} < x_3 < 0 \text{ et } 5 < x_4 < \frac{11}{2}.$$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_3		2		3		x_4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 5x - 2$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	

Puisque

$$|x^2 - 5x + 2| \leqslant 4 \iff x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \text{ et } x^2 - 5x - 2 \leqslant 0.$$

l'ensemble des solutions est $\boxed{\left[\dfrac{5 - \sqrt{33}}{2}, 2\right] \cup \left[3, \dfrac{5 + \sqrt{33}}{2}\right]}$.

7. (a)
```
x = input('x =')
y = 0
for k = 0 : n
    y = y + x^k
end
disp(y)
```

(b) $\boxed{\text{Pour } x \neq 1,\ f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ et } f(1) = n + 1.}$

(c)
```
x = input('x =')
if x == 1 then
    y = n + 1
else
    y = (1-x^(n+1))/(1-x)
end
disp(y)
```

Exercice 2

Il faut commencer par remarquer que $\boxed{g(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x} \times \ln(1 + x)\right)}$.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $x \mapsto x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty$ donc par composée, $x \mapsto \ln(1 + x)$ est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[.$$

Par produit, $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times \ln(1 + x)$ est définie et dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
Enfin, la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, $\boxed{g \text{ est définie et dérivable sur } \mathcal{D}_g =]-1, 0[\cup]0, +\infty[}$

2.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x + 1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\dfrac{1}{x} \times \ln(1 + x)\right) = +\infty$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ donc par composée $\boxed{\lim\limits_{x \to (-1)^+} g(x) = +\infty}$.
- Par taux d'acccroissement usuel, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ et puisque $\lim\limits_{x \to 1} \exp(x) = \mathrm{e}$, par composée $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \mathrm{e}}$ (valable en 0^+ et en 0^-).
- Soit $x > 0$.

$$\frac{1}{x} \times \ln(1 + x) = \frac{1}{x} \times \ln\left(x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right).$$

Or, par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et par produit et composée , $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right) = 0$. Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

3. Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

   (a) $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est rationnelle et définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et (vue en question 1) $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Donc h est bien dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   Soit $x \in]-1,+\infty[$.

$$h'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}.$$

   Puisque $(1+x)^2 > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $-x$.

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

   $\boxed{h \text{ est croissante sur }]-1,0] \text{ et décroissante sur } [0,+\infty[.}$

   (b) D'après les variations de h, elle admet un maximum en 0 qui vaut $h(0) = 0$. $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in]-1,+\infty[,\ h(x) \leqslant 0.}$

4. Soit $x \in \mathcal{D}_g$. Notons $u : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \leqslant 0$$

   d'après la questions précédente. De plus,

$$g'(x) = u'(x) \times \exp(u(x))$$

   est du signe de $u'(x)$ car $\exp(u(x)) > 0$. Donc $g'(x) \leqslant 0$. Le tableau de variation de g est

x	-1		0		$+\infty$
g	‖	$+\infty \searrow \mathrm{e}$	‖	$\mathrm{e} \searrow 0$	

Exercice 3

Partie 1 - Étude d'une fonction

1. $x \mapsto 1$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par combinaison linéaire $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. $\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par somme $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.
   Soit $x < 0$,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x} - x = 1 - \frac{1 + x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}.$$

   Or $\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc par quotient puis somme, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1.$$

   Or par stricte croissance de ln sur $]0,+\infty[$:

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow -x \geqslant \ln(1) \Leftrightarrow x \leqslant 0$$

   et

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

   Le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Puisque l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions on peut dire que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,0] \text{ et strictement décroissante sur } [0,+\infty[.}$

4. f admet un maximum en 0 qui vaut $f(0) = 0$ donc $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) \leqslant 0}$.
De plus :
   - si $x < 0$, $f(x) < f(0) = 0$ car f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$;
   - si $x > 0$, $f(x) < f(0) = 0$ car f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

   On en déduit que $f(x) < 0$ si $x \neq 0$ et donc $\boxed{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0}$.

5. **Une erreur dans l'énoncé.** Pour tout réel x,
$$f(x) \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad 1 - \mathrm{e}^{-x} - x \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x.$$
Ceci est aussi valable en évaluant en $-x$:
$$\boxed{\mathrm{e}^{x} \geqslant 1 + x.}$$

Partie 2 - Étude de la suite

6.
```
n = input('n = ')
u = 1
for k  = 1 : n
    u = 1 - exp(-u)
end
disp(u)
```

7. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
Initialisation : $u_0 = 1 > 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $-u_n < 0$ donc $\exp(-u_n) < 1$ par stricte croissance de exp. Ainsi,
$$u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n) > 0.$$
Conclusion : $\boxed{\text{d'après le principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \exp(-u_n) - u_n = f(u_n) \leqslant 0$$
d'après la question 4. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

9. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

10. Notons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n \in \mathbb{R}$.
    - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc par passage à la limite $\ell \geqslant 0$ (cette étape est en fait inutile ici).
    - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n)$.
    Or $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} (1 - \exp(-u_n)) = 1 - \mathrm{e}^{-\ell}$ donc
    $$\ell = 1 - \mathrm{e}^{-\ell} \quad \text{donc} \quad 1 - \mathrm{e}^{-\ell} - \ell = 0 \quad \text{donc} \quad f(\ell) = 0.$$
    D'après la question 4, ceci signifie que $\ell = 0$.
    $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. $1 + u_n > 0$ donc
$$\begin{aligned}
u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1 + u_n} &\Leftrightarrow u_{n+1}(1 + u_n) \geqslant u_n \\
&\Leftrightarrow (1 - \mathrm{e}^{-u_n})(1 + u_n) \geqslant u_n \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-u_n} + u_n - u_n \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant u_n \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-u_n} - u_n \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_n} - 1 - u_n \geqslant 0 && \text{car } \mathrm{e}^{u_n} > 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{u_n} + u_n \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow f(-u_n) \leqslant 0.
\end{aligned}$$
ce qui est vrai d'après la question 4. On peut aussi utiliser la question 5 (corrigée).
Donc $\boxed{u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{1 + u_n}}$.

Exercice 4

Partie I : dans cette partie que $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4} u_n^2$

1. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

   Initialisation : $u_1 = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$ donc $0 < u_1 \leqslant \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^1}$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ tel que $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Alors $0 < u_n^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^2$ car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $0 < \dfrac{3}{4}u_n^2 \leqslant \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2^{2n}}$.

Or $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} \times \dfrac{3}{4 \times 2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} \times \dfrac{3}{2^{n+1}}$ et $2^{n+1} \geqslant 2^2 = 4$ car $n \geqslant 1$ donc $\dfrac{3}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{3}{4} \leqslant 1$ (**c'est ici que l'hypothèse $n \geqslant 1$ est cruciale - c'est pour cela que l'on a pas démarré la récurrence à $n = 0$**).

Ainsi, $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2^{2n}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. On a bien : $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ 0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}}$

Puisque $u_0 = \dfrac{2}{3}$, $0 < u_0 \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}$ donc l'encadrement est vrai aussi en $n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}u_n^2\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 2\ln(u_n) + 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 2w_n$$

Donc $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } 2.}$

3. $w_0 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Ainsi, la question précédente permet de dire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)2^n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{3}\exp(w_n) = \dfrac{4}{3}\exp\left(2^n \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$. On a alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4}{3 \times 2^{2^n}}}$$

4. **Méthode 1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ d'après la question 1. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ car $2 > 1$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Méthode 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ donc par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty$.

Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $0 < u_k \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ d'après la question 1.

Ainsi, par somme, on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n} 0 < \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$. Or, $\sum\limits_{k=0}^{n} 0 = 0$ et, puisque $\dfrac{1}{2} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 2 - \frac{1}{2^n}}$$

Partie II : dans cette partie que $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3 - u_n = \frac{3}{4}u_n^2 - 3u_n + 3.$$

Cherchons le signe du trinôme $\dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3$. $\Delta = 0$ et le coefficient dominant est $\dfrac{3}{4} > 0$ donc $\dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \geqslant 0$ pour tout réel x. En particulier, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle est minorée par $u_0 = 3$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3}$.

8. Supposons, par l'absurde, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
   - On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$. Donc, par passage à la limite, $\ell \geqslant 3$.
   - De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3\right) = \dfrac{3}{4}\ell^2 - 2\ell + 3$. Donc $\ell = \dfrac{3}{4}\ell^2 - 2\ell + 3$ et donc $\dfrac{3}{4}\ell^2 - 3\ell + 3 = 0$. On a déjà étudié le trinôme $\dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3$ à la question 6. $\Delta = 0$, il y a une seule solution : $\ell = 2$. Or $\ell \geqslant 3$. Ceci est absurde.

L'hypothèse de départ est donc fausse : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$.

9. Puisque, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, le théorème de la limite monotone nous dit alors que soit (u_n) converge, soit elle tend vers $+\infty$. La question précédente permet alors de dire que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$