Devoir surveillé 1

Vendredi 11 septembre 2020 - 2h
Pas de calculatrice ! Sujet recto-verso !

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On rappelle que $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,7$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leur équation.
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.
   (b) Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x) \geqslant 0$.
   (c) En déduire le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 2

On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Étudier la parité de g.
3. On admet que g est dérivable sur $]-2, 2[$. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.
4. La fonction g admet-elle un minimum et un maximum ? Si oui, préciser leur valeur.

Exercice 3

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E).$$

1. Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).
2. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = (z + 2\mathrm{i})\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{7+4u_n}{5}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 7$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 7.$$

   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$.

   (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 7 + 3\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

   (c) Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.