DEVOIR SURVEILLÉ 1 - CORRIGÉ

Exercice 1

1. ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par quotient, f est définie et dérivable sur
$$\boxed{\{x \in]0,+\infty[\ \mid \ x \neq 0\} =]0,+\infty[.}$$
2e rédaction : ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, f est définie et dérivable sur $0,+\infty[$.

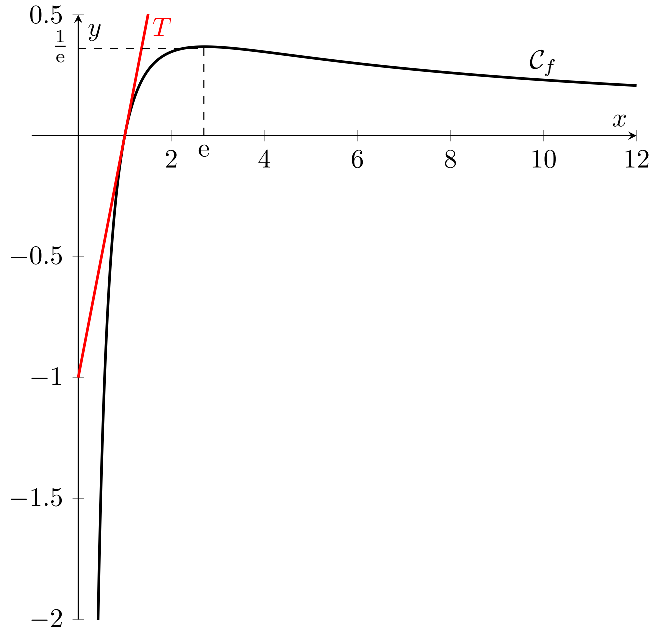
2. (a) Par croissance comparée, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$.
2e rédaction : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
(b) La droite d'équation $\boxed{y = 0}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
La droite d'équation $\boxed{x = 0}$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$ (remarque : on a déjà justifié la dérivabilité en 1.)
$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.}$$
(b) Soit $x > 0$.
$$1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e^1$$
car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } 1-\ln(x) \geqslant 0 \text{ est }]0,e[.}$
(c) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Or $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$. D'après la question précédente et
$$1 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$$
on obtient le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

4. $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ et $f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$.
Donc $\boxed{\text{l'équation de } T \text{ est } y = x - 1.}$

5.



Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto 4 - x^2$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Par composée, g est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \ \mid \ 4 - x^2 \geqslant 0\}.$$
Or on a

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{g \text{ est définie sur } [-2, 2].}$

2.
- g est définie sur $[-2, 2]$ et pour $x \in [-2, 2]$ on a $-x \in [-2, 2]$.
- Soit $x \in [-2, 2]$.
$$g(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = g(x).$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est paire.}}$

3. On admet que g est dérivable sur $]-2, 2[$. Soit $x \in]-2, 2[$.
$$\boxed{g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}.}$$
Or $\sqrt{4 - x^2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-2		0		2
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
g	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

4.
- g est majorée par $2 = g(0)$ donc $\boxed{g \text{ admet pour maximum } 2}$ (atteint en 0).
- g est minorée par $0 = g(2)$ donc $\boxed{g \text{ admet pour minimum } 0}$ (atteint en 2, et en -2).

Exercice 3

1.
$$\begin{aligned}(-2i)^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2i\right)(-2i)^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right)(-2i) + 8i &= 8i - 4\left(-2\sqrt{3} + 2i\right) - 8i - 8\sqrt{3} + 8i \\ &= 8i + 8\sqrt{3} - 8i - 8i - 8\sqrt{3} + 8i \\ &= 0\end{aligned}$$
Donc $\boxed{\text{le nombre } -2i \text{ est une solution de l'équation } (E)}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned}(z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) &= z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z + 2iz^2 - 4i\sqrt{3}z + 8i \\ &= z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2i\right)z^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right)z + 8i.\end{aligned}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned}z \text{ est solution de } (E) &\iff z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2i\right)z^2 + \left(4 - 4i\sqrt{3}\right)z + 8i = 0 \\ &\iff (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0 \\ &\iff z + 2i = 0 \ \text{ ou } \ z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0\end{aligned}$$
Or $z + 2i = 0 \iff z = -2i$ (on retrouve la solution observée en 1.)
Résolvons $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0$.
Les solutions complexes sont : $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{-2i\ ,\ \sqrt{3} - i\ ,\ \sqrt{3} + i\}.}$

Exercice 4

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 7$.

   Initialisation : $u_0 = 10 \geqslant 7$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 7$. Alors

$$\begin{aligned} 4u_n &\geqslant 28 \\ \text{donc}\quad 7 + 4u_n &\geqslant 35 \\ \text{donc}\quad u_{n+1} = \frac{7+4u_n}{5} &\geqslant 7 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 7.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7+4u_n}{5} - u_n = \dfrac{7-u_n}{5} \leqslant 0$, car $u_n \geqslant 7$.
   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 7 \\ &= \frac{7+4u_n}{5} - 7 \\ &= \frac{-28+4u_n}{5} \\ &= \frac{4(-7+u_n)}{5} \\ &= \frac{4}{5}v_n \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{4}{5}.}$

   (b) $v_0 = u_0 - 7 = 3$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

   Ainsi,

$$\boxed{u_n = 7 + v_n = 7 + 3\left(\frac{4}{5}\right)^n.}$$

   (c) $\dfrac{4}{5} \in]-1,1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Ainsi, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 7.}$