Devoir maison 7

Pour le jeudi 17 décembre 2020

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $D = [0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Justifier que f est continue sur D.
2. Justifier que f est dérivable sur D et donner la valeur de $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{e}$.
5. (a) Démontrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - \mathrm{e}).$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

   (c) Étudier alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) En utilisant la majoration de 5.(b), écrire un programme Scilab qui détermine un entier naturel n tel que $u_n - \mathrm{e} \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ -2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.