Devoir maison 7 – Corrigé

Exercice 1

1. Sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$. Or $x\mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus $\ln(x)$ ne s'annule pas pour $x\in\,]0,1[\cup]1,+\infty[$. Par quotient, f est continue sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.
   En 0 : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$ donc f est continue en 0.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } D}$
   Attention : f n'est pas définie en 1 donc cela n'a pas de sens d'étudier la continuité en 1.

2. Sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ $x\mapsto x$ et $x\mapsto\ln(x)$ sont dérivables donc par quotient, f est dérivable sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.
$$\boxed{\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[,\quad f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}.}$$
   En 0 : soit $x\in]0,1[$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{\ln(x)}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0\in\mathbb{R}$$
   Donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0)=0}$.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } D}$

3. Limite en $+\infty$: par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   Limite en 1^+ et 1^- :
   $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to1^-}\ln(x)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$.

   Signe de $f'(x)$: pour $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\ln(x)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)-1$.
$$\ln(x)-1\geqslant0\Leftrightarrow\ln(x)\geqslant1\Leftrightarrow x\geqslant\mathrm{e}\,.$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Initialisation : $u_0=3\geqslant\mathrm{e}$.
   Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\geqslant\mathrm{e}$. Puisque f est croissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$,
$$u_{n+1}=f(u_n)\geqslant f(\mathrm{e})=\mathrm{e}\,.$$
   Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n\geqslant\mathrm{e} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.}$

5. (a) Plaçons nous sur $I=[\mathrm{e},+\infty[$.
   - f est dérivable sur I.
   - pour tout $x\in I$, $f'(x)=\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}=y-y^2$ en posant $y=\dfrac{1}{\ln(x)}$. Or $u:y\mapsto y-y^2$ est une fonction du second degré admettant un maximum en $\dfrac{-1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$ qui vaut $u\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$: pour tout $y\in\mathbb{R}$, $u(y)\leqslant\dfrac{1}{4}$.
     Donc $f'(x)\leqslant\dfrac{1}{4}$ et d'après la question 3, on a aussi $f'(x)\geqslant0$ pour $x\in I$.
$$\forall x\in I,\quad 0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{4}.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée en $u_n\in I$ et $\mathrm{e}\in I$, avec $\mathrm{e}\leqslant u_n$:
$$0(u_n-\mathrm{e})\leqslant f(u_n)-f(\mathrm{e})\leqslant\frac{1}{4}(u_n-\mathrm{e}).$$
   Ainsi,
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_{n+1}-\mathrm{e}\leqslant\frac{1}{4}(u_n-\mathrm{e}).}$$

(b) Initialisation : $u_0 - \mathrm{e} = 3 - \mathrm{e}$. Or $\mathrm{e} \in [2,3]$ donc $0 \leqslant u_0 - \mathrm{e} \leqslant 1 = \frac{1}{4^0}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n - \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4^n}$. Alors

$$0 \leqslant u_{n+1} - \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - \mathrm{e}) \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4^n}.}$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \mathrm{e}) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ converge vers e.}}$

(d)

```
// Avec 5b : programme court (et qui respecte la consigne)
n = 0
while 1/(4^n) > 10^(-3)
    n = n + 1
end
disp(n)

// Sans 5b
n = 0
u = 3
while u-%e > 10^(-3)
    n = n + 1
    u = u / log(u)
end
disp(n)
```

Exercice 2

$$\begin{cases} 2x + y + \boxed{z} = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ -2x + 5y + z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L2\leftarrow L2-L1 \\ L3\leftarrow L2-L3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + y + \boxed{z} = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \quad (-2L2,\ \text{inutile})$$

$$\underset{L2\leftarrow \frac{1}{2}L2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + y + \boxed{z} = 0 \\ \boxed{x} - y = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L1\leftarrow L1-2L2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3y + \boxed{z} = 0 \\ \boxed{x} - y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{z} = -3y \\ \boxed{x} = y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z) = (y,y,-3y)$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{(y,y,-3y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}\}.}$

On peut aussi avoir trouvé (suivant les pivots choisis)

$$\{(x,x,-3x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$\left\{\left(-\frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}z, z\right) \quad , \quad z \in \mathbb{R}\right\}$$