DEVOIR MAISON 6

Pour le mardi 1er décembre 2020

Exercice 1

1. On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, 2y-6x) \end{array}$

   (a) Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,0)$. L'application f est-elle injective ?

   (b) Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2)$. L'application f est-elle surjective ?

   (c) Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\text{Im}(f) = \{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\}$.

2. On note $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 6x+2y) \end{array}$. Montrer que g est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 2

On pioche une main de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes. Ce jeu contient 8 coeurs, 8 trèfles, 8 carreaux et 8 piques. Calculer la probabilité d'obtenir 2 trèfles et 2 coeurs.

Exercice 3

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la « cage à écureuil ». Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.

La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C.

On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au C avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau C, alors il y reste définitivement.

On note, pour tout entier naturel n,

- A_n l'événement : « l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n »,
- B_n l'événement : « l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n ».
- C_n l'événement : « à l'instant n l'enfant est au sommet ».

On note a_n, b_n et c_n les probabiltés respectives de ces trois événements. On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. Donner les probabilités a_1, b_1 et c_1.
2. En utilisant la **formule des probabilités totales** (une rédaction rigoureuse est attendue), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$
   Attendez d'avoir vu la rédaction en cours avant de rédiger cette question au propre.
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = \dfrac{2}{3}b_{n+1} - \dfrac{1}{9}b_n$.
5. Déterminer alors l'expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.