Devoir maison 6 - Corrigé

Exercice 1

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, 2y-6x) \end{array}$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3x \Leftrightarrow (x,y) = (x,3x).$$

Donc l'ensemble des antécédents de $(0,0)$ est
$$\boxed{\{(x,3x), x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}.}$$
Cet ensemble contient une infinité d'éléments, donc f n'est pas injective.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = (1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2y - 6x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ -2 = 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution, donc $\boxed{(1,2) \text{ n'a pas d'antécédent par } f.}$ Ainsi, f n'est pas surjective.

3.
   - Soit $u = (a,b) \in \mathrm{Im}(f)$. Alors u s'écrit $u = f(x,y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors $\begin{cases} 3x - y = a \\ 2y - 6x = b \end{cases}$. Ainsi, $b = 2y - 6x = -2(3x-y) = -2a$. Donc $u = (a, -2a)$. On a montré que $\mathrm{Im}(f) \subset \big\{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\big\}$.
   - Réciproquement, Soit $u = (a,-2a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = f(x,y)$. Or

$$u = f(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = a \\ 2y - 6x = -2a \end{cases} \begin{cases} y = 3x - a \\ -2a = -2a \end{cases} \Leftrightarrow y = 3x - a$$

   Par exemple, en prenant $(x,y) = (0,-a)$, on a $f(x,y) = (a,-2a) = u$. Donc $u \in \mathrm{Im}(f)$. On a ici montré que $\big\{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathrm{Im}(f)$.
   - Conclusion : par double-inclusion, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \big\{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\big\}}$.

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 6x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a - x \\ 4x + 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6a-b}{4} \\ x = \dfrac{b-2a}{4} \end{cases}$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $g(x,y) = (a,b)$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ donc g est bijective et son application réciproque est

$$\boxed{g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\dfrac{b-2a}{4}, \dfrac{6a-b}{4}\right) \end{array}}$$

Exercice 2

L'univers Ω est l'ensemble des mains possibles. Pour choisir une main, on pioche simultanément 4 cartes parmi les 32 cartes du jeu donc $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{32}{4}$.
Chaque main étant équiprobable, on munit Ω de la probabilité uniforme P.

Soit A l'événement : « obtenir 2 trèfles et 2 cœurs ». Pour choisir une main de A :

- On choisit simultanément 2 trèfles parmi les 8 trèfles : il y a $\binom{8}{2}$ possibilités ;
- Puis, on choisit simultanément 2 cœurs parmi les 8 cœurs : il y a $\binom{8}{2}$ possibilités.

Ainsi, $\mathrm{Card}(A) = \dbinom{8}{2} \times \dbinom{8}{2} = \dbinom{8}{2}^2$.

On a alors $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{8}{2}^2}{\binom{32}{4}}$.

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 2 trèfles et 2 cœurs est } \frac{\binom{8}{2}^2}{\binom{32}{4}}.}$$

Exercice 3

1. À l'instant 0, l'enfant est en A donc selon l'énoncé il reste en A à l'instant suivant avec la probabilité $\boxed{a_1 = \frac{1}{3}}$, il passe en B avec la probabilité $\boxed{b_1 = \frac{2}{3}}$. Il est impossible qu'il passe en C donc $\boxed{c_1 = 0}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'enfant est forcément en A ou B ou C et il ne peut être à deux endroits en même temps donc (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements et en utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}).$$

De plus, l'énoncé donne : $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$.

Donc $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$.

De même, $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}, P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}, P_{C_n}(B_{n+1}) = 0,$

Donc

$$P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$

Bilan :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n}$$

3. La relation $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, assure que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $a_0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$b_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} = \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n\right) = \frac{4}{9}a_n + \frac{1}{9}b_n$$

et

$$\frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n\right) - \frac{1}{9}b_n = \frac{4}{9}a_n + \frac{1}{9}b_n.$$

Donc

$$\boxed{b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n}$$

5. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} \iff 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$\Delta = 0$, il y a une seule racine $r_0 = \frac{1}{3}$.

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = (\lambda n + \mu) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or,

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ (\lambda + \mu) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

6. Pour tout entier naturel n, $\boxed{a_n + b_n + c_n = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1}$ car (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

Ainsi $\boxed{c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - (1 + 2n)\left(\frac{1}{3}\right)^n.}$