Devoir maison 5

Pour le mardi 17 novrembre 2020

Exercice 1

Soit $P = 6X^4 + 13X^3 + 12X^2 - 2X - 4 \in \mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de factoriser P.

1. Montrer que $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{2}{3}$ sont racines de P.
2. En déduire un polynôme Q de degré 2 et de coefficient dominant 6 qui divise P.
3. Factoriser alors au maximum P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

1. On considère la fonction

$$f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Étudier la continuité de la fonction f.
   (b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2. On considère maintenant la fonction

$$g\colon \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Justifier que g est bien continue sur $[0,+\infty[$.
   (b) Étudier les variations de g sur $]0,+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variation de g sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On notera, pour $x > 0$, $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx + \ln(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,1]$. On notera cette solution u_n.
2. Déterminer u_0.
3. Comparer $f_{n+1}(u_{n+1})$ et $f_{n+1}(u_n)$ En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.
5. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\ell = 0$.