Devoir maison 5 – Corrigé

Exercice 1

1. $P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\times\frac{1}{16}+13\times\frac{1}{8}+12\times\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}-4 = \frac{3}{8}+13\times\frac{1}{8}-2 = 2-2 = 0$

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{2}{3}\right) &= 6\times\frac{16}{81}-13\times\frac{8}{27}+12\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{3}-4 \\ &= \frac{2\times 16-13\times 8+12\times 4\times 3+4\times 9}{27}-4 \\ &= \frac{4(8-26+36+9)}{27}-4 = \frac{4\times 27}{27}-4 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{2}{3} \text{ sont racines de } P.}$

2. Puisque $\frac{1}{2} \neq -\frac{2}{3}$, on en déduit que $(X-\frac{1}{2})(X+\frac{2}{3})$ divise P et donc $\boxed{Q = 6(X-\frac{1}{2})(X+\frac{2}{3}) \text{ divise } P}$ (et est bien de degré 2 et de coefficient dominant 6).

3. On a : $Q = 6X^2+X-2$. Réalisons la division euclidienne de P par Q.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4+13X^3+12X^2-2X-4 & 6X^2+X-2 \\ \cline{2-2} -(6X^4+X^3-2X^2) & X^2+2X+2 \\ \cline{1-1} 12X^3+14X^2-2X-4 & \\ -(12X^3+2X^2-4X) & \\ \cline{1-1} 12X^2+2X-4 & \\ -(12X^2+2X-4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On a alors $P = (X^2+2X+2)Q$. Or $\Delta(X^2+2X+2) = -4 < 0$ donc, dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation optimale de P est

$$\boxed{P = 6\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{2}{3}\right)(X^2+2X+2)}$$

Exercice 2

1. On considère la fonction

$$f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

(a) Les fonctions $x\mapsto x+1$ (polynomiale) et exp sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto -\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par composée et produit, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
En 0 : $\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc par composée, $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Par produit, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \neq f(0)$. Donc f n'est pas continue en 0.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^* \text{ uniquement.}}$

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1$ donc par composée, $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$. Par produit, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(c) Soit $x\neq 0$. $f(x)-x = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-x = x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1\right)+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On a déjà vu que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$. Étudions la limite en l'infini de $x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1\right)$.

Posons alors $h = -\frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1\right) = -\frac{1}{h}(\mathrm{e}^h-1) = -\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -1$$

par taux d'accroissement usuel.

Ainsi, $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = -1+1 = 0$. Ceci signifie que

$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f\text{, au voisinage de } +\infty \text{ et de } -\infty.}$

2. On considère maintenant la fonction

$$g\colon \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}$$

(a) g est continue sur $]0,+\infty[$ car f l'est.
En 0 (ici on est forcément en 0^+) : $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$. Par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$.
Donc g est bien continue en 0.
Conclusion : $\boxed{g \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

(b) Les fonctions $x\mapsto x+1$ (polynomiale) et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par composée et produit, $x\mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc en particulier, g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Soit $x>0$.

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(x^2+x+1)$$

Or, pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}>0$, $x^2>0$ et $x^2+x+1>0$ (même pas besoin de calculer le discriminant) donc $g'(x)>0$.
$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$

(c)

x	0	$+\infty$
g	0 $\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}$. On notera, pour $x>0$, $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Étudions la fonction f_n. Par somme, f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x>0$, $f'(x) = n + \dfrac{1}{x} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$ par somme et $f_n(1) = n$.

   La fonction f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,1]$ et 0 appartient à $]\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x), f_n(1)]$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $]0,1]$, notée u_n.

2. Si $n=0$, $f_0(x) = \ln(x)$. Ainsi, u_0 est l'unique solution de l'équation $\ln(x)=0$, c'est-à-dire $\boxed{u_0 = 1.}$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par définition de u_{n+1}, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Par ailleurs,

   $$f_n(u_n) = (n+1)u_n + \ln(u_n) = u_n + f_n(u_n) = u_n + 0 = u_n > 0$$

   car $u_n \in]0,1]$. Ainsi
   $$f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_n).$$
   Par stricte croissance de f_{n+1} sur $]0,1]$, on a donc

   $$u_{n+1} < u_n.$$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car $u_n\in]0,1]$). D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$
   On sait aussi que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n\leqslant 1$, donc par passage à la limite $\boxed{0\leqslant \ell\leqslant 1.}$

5. Supposons, par l'absurde que $\ell\neq 0$. On suppose donc $\ell\in]0,1]$. Puisque $\ell>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$ (pas de forme indéterminée) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)\in\mathbb{R}$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_n + \ln(u_n)) = +\infty$. Or, $nu_n + \ln(u_n) = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Contradiction.
   On en déduit que $\boxed{\ell = 0.}$