

DEVOIR MAISON 4

Révisions pour les vacances.

Exercice 1

Étude de fonctions

Soit $f: x \mapsto x^2 - x \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f . (*Quand le signe de $f'(x)$ n'est pas clair, on ...*)

Exercice 2

Suites et sommes

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. (Calcul) Montrer que $S_1 = \frac{1}{2}$ et $S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*non immédiat pour S_2*).
2. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. (a) (Calcul) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n} \times u_n - \sqrt{n+1} \times u_{n+1}$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 - \sqrt{n} \times u_n$. On pourra utiliser une démonstration par récurrence.
 (c) En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
4. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel S . On ne demande pas de calculer S .

Exercice 3

Probabilités (révisions de première/terminale)

Soit x un réel de l'intervalle $[0, 80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne. *Exercice à faire sans calculatrice (comme d'habitude).*

1. Faire un arbre probabiliste représentant l'expérience, avec les probabilités déduites immédiatement de l'énoncé. On pensera à donner un nom à chacun des événements.
Exemple : Soit B l'événement « tirer un cube bleu », etc.
2. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $\frac{3}{25} + \frac{x}{250}$.
3. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
 Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.