Devoir maison 4 – Corrigé

Exercice 1

1. • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0}$.

   • Soit $x > 0$.
$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc par produit et différence, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Soit $x > 0$.
$$f'(x) = 2x - \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln(x) - 1.$$
Le signe de $f'(x)$ n'est pas clair. Étudions la fonction f'. Par combinaison linéaire, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$.
$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$
Puisque $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2x - 1$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

La fonction f' est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, 0[$. Elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$ qui vaut $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) > 0$. Donc
$$\forall x > 0, \quad f'(x) \geqslant f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$
On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$

Exercice 2

1. $u_1 = \dfrac{\sqrt{0!}}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{\sqrt{1!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{1}{2+2\sqrt{2}}$. Ainsi, $\boxed{S_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}}$ et
$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})+1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
donc
$$\boxed{S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$
car $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)\left(1+\sqrt{n+1}\right)}$. $\boxed{(S_n) \text{ est donc croissante.}}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sqrt{n} \times u_n - \sqrt{n+1} \times u_{n+1} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{(n-1)!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)} - \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)\left(1+\sqrt{n+1}\right)}$$
Or, $\sqrt{n}\sqrt{(n-1)!} = \sqrt{n \times (n-1)!} = \sqrt{n!}$. Ainsi, en mettant au même dénominateur :
$$\begin{aligned}\sqrt{n} \times u_n - \sqrt{n+1} \times u_{n+1} &= \frac{\sqrt{n!}\left(1+\sqrt{n+1}\right) - \sqrt{n+1}\sqrt{n!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)\left(1+\sqrt{n+1}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{n!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)\left(1+\sqrt{n+1}\right)}\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{n} \times u_n - \sqrt{n+1} \times u_{n+1}.}$

(b) Initialisation : $S_1 = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \sqrt{1}u_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, donc $S_1 = 1 - \sqrt{1}u_1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 1 - \sqrt{n} \times u_n$. Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} && \text{(voir question 2)} \\ &= \left(1 - \sqrt{n} \times u_n\right) + \left(\sqrt{n} \times u_n - \sqrt{n+1} \times u_{n+1}\right) && \text{(d'après la question 3a)} \\ &= 1 - \sqrt{n+1} \times u_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{S_n = 1 - \sqrt{n} \times u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ donc $S_n = 1 - \sqrt{n} \times u_n \leqslant 1$ car $u_n \geqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ est donc majorée par 1.}}$

4. La suite (S_n) est majorée par 1 et croissante donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } S.}$

Exercice 3

Dans cet exercice nous noterons :

- B l'événement « tirer un cube bleu »
- R l'événement « tirer un cube rouge »
- C l'événement « tirer un cube marqué d'un cercle »
- L l'événement « tirer un cube marqué d'un losange »
- E l'événement « tirer un cube marqué d'une étoile ».

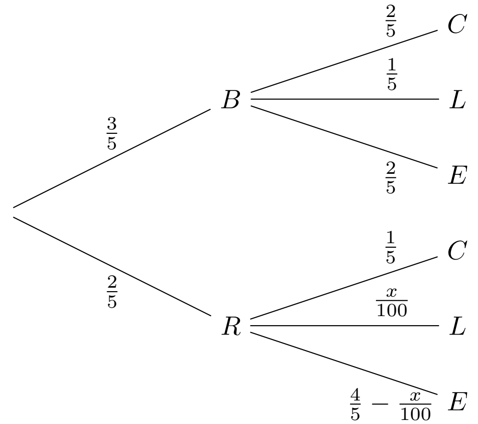
1. L'énoncé donne $P(B) = \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$ puis $P(R) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{5}$.

   On a aussi $P_B(C) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$, $P_B(L) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

   puis $P_B(E) = 1 - P_B(C) - P_B(L) = \dfrac{2}{5}$.

   Enfin, $P_R(C) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$, $P_R(L) = \dfrac{x}{100}$

   donc $P_R(E) = 1 - P_R(C) - P_R(L) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{x}{100}$.



2. D'après la formule des probabilités totales, B et R formant une partition de l'univers,

$$P(L) = P(B) \times P_B(L) + P(R) \times P_R(L) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{x}{100} = \frac{3}{25} + \frac{x}{250}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à } \frac{3}{25} + \frac{x}{250}.}$$

3. On cherche à savoir pour quels x on a : $P(E) = P(L)$. Or

$$P(E) = P(B) \times P_B(E) + P(R) \times P_R(E) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{x}{100}\right) = \frac{14}{25} - \frac{x}{250}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(E) = P(L) &\iff \frac{14}{25} - \frac{x}{250} = \frac{3}{25} + \frac{x}{250} \\ &\iff 140 - x = 30 + x && \text{(on a fait } \times 250) \\ &\iff x = 55. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile si et seulement si } x = 55.}$$

4. On cherche $P_L(B)$.

$$P_L(B) = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B) \times P_B(L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{3}{25} + \frac{50}{100}} = \frac{3}{8}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est égale à } \frac{3}{8}.}$$