DEVOIR MAISON 3

À rendre le mardi 13 octobre 2020

On fixe un réel λ tel que $0 < \lambda \leqslant 2$, et on définit la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda x(1-x) \end{array}.$$

Ici, λ est une constante.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \lambda u_n(1-u_n). \end{cases}$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de cette suite pour différentes valeurs de λ et u_0.

Partie 1 - Premier cas : $0 < \lambda \leqslant 1$

On suppose, dans cette partie uniquement, que $0 < \lambda \leqslant 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Étude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Un exemple : on suppose $\lambda = \dfrac{3}{4}$. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas.
   (b) On revient à $0 < \lambda \leqslant 1$. Montrer que le résultat trouvé en 2.(a) se généralise.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
4. (a) Déterminer ℓ dans le cas où $\lambda = \dfrac{3}{4}$.
   (b) Montrer que le résultat se généralise à tout $0 < \lambda \leqslant 1$.

Partie 2 - Deuxième cas : $1 < \lambda \leqslant 2$

On note $m = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ et on suppose que $1 < \lambda \leqslant 2$.

5. (a) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,1]$.
   On rappelle que $\lambda > 0$.
   (b) Montrer que $f(m) = m$ et que $0 < m \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. On suppose pour cette question que $0 < u_0 \leqslant m$.
   (a) Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant m$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
7. (Facultatif) On suppose maintenant que $m \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers m.