Devoir maison 3 - Corrigé

Partie 1 - Premier cas : $0 < \lambda \leqslant 1$

1. Démontrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   Initialisation : $u_0 \in]0,1/2]$ d'après l'énoncé donc $u_0 \in [0,1]$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0,1]$. $u_{n+1} = \lambda u_n(1-u_n)$.
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant 1-u_n \leqslant 1$$
   Par produit ce des deux inégalités (les nombres sont tous positifs) :
$$0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1.$$
   De plus $0 < \lambda \leqslant 1$, donc encore par produit :
$$0 \leqslant \lambda u_n(1-u_n) \leqslant 1.$$
   On a donc bien $u_{n+1} \in [0,1]$.

   Conclusion : par récurrence, $\boxed{u_n \in [0,1] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

2. Étude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) On suppose que $\lambda = \dfrac{3}{4}$. Donc $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n(1-u_n) = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3}{4}(u_n)^2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}(u_n)^2 - u_n = -\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}(u_n)^2 \leqslant 0$$
   car $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   (b) On revient à $0 < \lambda \leqslant 1$.Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \lambda u_n(1-u_n) - u_n \\ &= (\lambda-1)u_n - \lambda(u_n)^2. \end{aligned}$$
   Or $u_n \geqslant 0$ et $\lambda - 1 \leqslant 0$ donc $(\lambda-1)u_n \leqslant 0$. et $-\lambda(u_n)^2 \leqslant 0$. Par somme,
$$u_{n+1} - u_n = (\lambda-1)u_n + (-\lambda(u_n)^2) \leqslant 0.$$
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell.}$

4. (a) Supposons que $\lambda = \dfrac{3}{4}$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3}{4}(u_n)^2$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (cours) et $\dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3}{4}(u_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{4}\ell - \dfrac{3}{4}\ell^2$. Donc
$$\ell = \frac{3}{4}\ell - \frac{3}{4}\ell^2.$$
     Or,
$$\begin{aligned} \ell = \frac{3}{4}\ell - \frac{3}{4}\ell^2 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}\ell^2 + \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\ell^2 + \ell = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell(3\ell+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$
     Puisque $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, on en déduit que $\ell = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

   (b) Suposons $0 < \lambda \leqslant 1$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n(1-u_n)$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (cours) et $\lambda u_n(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell(1-\ell)$. Donc
$$\ell = \lambda\ell(1-\ell).$$
     Or,
$$\begin{aligned} \ell = \lambda\ell(1-\ell) &\Leftrightarrow \lambda\ell^2 + (1-\lambda)\ell = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell(\lambda\ell + 1 - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{\lambda-1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Or $0 < \lambda \leqslant 1$, donc $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \leqslant 0$. Puisque $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, on en déduit que $\ell = 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Partie 2 - Deuxième cas : $1 < \lambda \leqslant 2$

5. (a) Pour tout réel x, $f(x) = \lambda x - \lambda x^2$. Donc $f(x) = ax^2 bx + c$ avec $a = -\lambda < 0$, $b = \lambda$ et $c = 0$. $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$ donc d'après le cours (sur les fonctions du second degré) :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f	0	$\nearrow$	$\frac{\lambda}{4}$	$\searrow$	0

(b) $m = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ donc

$$\begin{aligned} f(m) &= \lambda\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda - 1 - \lambda\left(1 - \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(m) = m}$. De plus,

$$1 < \lambda \leqslant 2 \text{ donc } 1 > \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{1}{2}$$

car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$-1 < -\frac{1}{\lambda} \leqslant -\frac{1}{2} \text{ donc } \boxed{0 < m \leqslant \frac{1}{2}.}$$

6. On suppose pour cette question que $0 < u_0 \leqslant m$.

(a) Démontrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant m$.

Initialisation : $0 < u_n \leqslant m$ d'après l'énoncé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant m$. $u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n) = f(u_n)$.

Puisque $m \leqslant \dfrac{1}{2}$ que la fonction f est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ (question 5a),

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(m)$$

Or, $f(0) = 0$ et $f(m) = m$ (question 5b). Donc

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant m.$$

Conclusion : par récurrence, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant m \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (\lambda - 1)u_n - \lambda(u_n)^2 \\ &= u_n\left(\lambda - 1 - \lambda u_n\right) \end{aligned}$$

Or, $u_n \geqslant 0$ et

$$u_n \leqslant m \text{ donc } u_n \leqslant 1 - \frac{1}{\lambda} \text{ donc } \lambda u_n \leqslant \lambda - 1 \text{ (car } \lambda > 0).$$

Ainsi, $\lambda - 1 - \lambda u_n \geqslant 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c)
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par m donc elle converge vers un réel ℓ, d'après le théorème de la limite monotone.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant m$ (on utilise la croissance) donc par passage à la limite $u_0 \leqslant \ell \leqslant m$, avec $u_0 > 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n)$. Comme à la question 4b,

$$\ell = \lambda\ell(1 - \ell),$$

ce qui donne :

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Puisque $\ell > 0$, on en déduit que

$$\ell = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda} = m.$$

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } m.}$

7. On suppose maintenant que $m \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Le tableau de variation de f

x	$-\infty$	m	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	m ↗	$\frac{\lambda}{4}$ ↘	$-\infty$

permet de dire que $u_1 = f(u_0)$ est entre m et $\dfrac{\lambda}{4}$. Et comme $\dfrac{\lambda}{4} \leqslant \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $m \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Initialisation : $m \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ par hypothèse.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Puisque que la fonction f est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ (question 5a),

$$f(m) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ donc } m \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\lambda}{4}.$$

Or $\dfrac{\lambda}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc

$$m \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Conclusion : par récurrence, $\boxed{m \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Étudions maintenant la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n\left(\lambda - 1 - \lambda u_n\right) \\ &= \lambda u_n\left(m - u_n\right). \end{aligned}$$

Or, $u_n \geqslant 0$, $\lambda > 0$ et $m - u_n \leqslant 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Il nous reste à montrer la convergence et à calculer la limite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m donc elle converge vers un réel ℓ, d'après le théorème de la limite monotone.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc par passage à la limite $m \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n)$. Comme précédemment

  $$\ell = \lambda\ell(1-\ell),$$

  donc

  $$\ell = 0 \text{ ou } \ell = m.$$

  Puisque $\ell \geqslant m > 0$, on en déduit que $\ell = m$.

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } m.}$