Devoir maison 2 – Corrigé

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto 2x-1$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est rationnelle donc définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$. Par composée, $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est définie sur
$$\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad \middle| \quad \frac{x}{x+1} > 0\right\}.$$
Or,

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est définie sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
Par somme, $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.}$

2.
- $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
Or, $\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = 0$, donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0.$
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ on en déduit, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$
- De même, $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0.$
Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty$ on en déduit, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$
- $\dfrac{x}{x+1} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = -\infty.$
Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}(2x-1) = -1$ on en déduit, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty.}$
- Enfin, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1) = 0^-$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = +\infty.$
Puisque $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(2x-1) = -3$ on en déduit, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty.}$

3. (a) Soit $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
$$f(x)-(2x-1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$
d'après la question 2.
Donc $\boxed{D \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty \text{ et de } -\infty.}$

(b) Étudions le signe de $f(x)-(2x-1) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Soit $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
$$\begin{aligned} f(x)-(2x-1) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \geqslant \ln(1) \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geqslant 1 \qquad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - 1 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} \geqslant 0 \end{aligned}$$
Or,

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$			$+$
$\dfrac{-1}{x+1}$	$+$			$-$
$f(x)-(2x-1)$	$+$			$-$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de } D \text{ sur }]-\infty,-1[\text{ et est dessous sur }]0,+\infty[.}$

4. La fonction $x \mapsto 2x-1$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et elle est strictement positive sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
   La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Par composée puis somme, f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

   Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = 2 + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$$

   Le discriminant de $2x^2+2x+1$ est $\Delta = -4 < 0$ donc $2x^2+2x+1 > 0$ (car le coefficient dominant est $2>0$) et $f'(x)$ est du signe de $x(x+1) = x^2+x$. Ainsi,

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$				$+$	

   Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,-1[\text{ et sur }]0,+\infty[.}$

5. (a) Le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   - Sur $]-\infty,-1[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus 0 est entre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty,-1[$.
   - Sur $]0,+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus 0 est entre $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.

   En conclusion, $\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet exactement deux solutions.}}$

   (b) Notons α la solution dans $]0,+\infty[$.
   On a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$ (car $0 < \dfrac{1}{3} < 1$) et $f(1) = 1-\ln(2) > 0$ car $\ln(2) < \ln(e) = 1$.
   On a donc

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f(1).$$

   Puisque f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1.}$$

Exercice 2

1. • Montrons $1-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$. Pour cela on va étudier la fonction $f : x \mapsto 1-\dfrac{x^2}{2}-\cos(x)$. Par combinaison linéaire de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi,\pi]$.

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad f'(x) = -x+\sin(x).$$

Étudions la fonction f' pour trouver son signe. Par différence, f' est dérivable sur $[-\pi,\pi]$.

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad f''(x) = -1+\cos(x) \leqslant 0$$

car $\cos(x) \leqslant 1$. La fonction f' est donc décroissante sur $[-\pi,\pi]$. Ainsi, on a :

x	$-\pi$		0		π
f'	π	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\frac{\pi^2}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi^2}{2}$

On en déduit que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, donc $\boxed{1-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \text{ pour tout } x \in [-\pi,\pi].}$

• Montrons maintenant que $\cos(x) \leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$. Pour cela on va étudier la fonction $g : x \mapsto \cos(x)-1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}$. Par combinaison linéaire de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi,\pi]$.

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad g'(x) = -\sin(x)+x-\frac{x^3}{6}.$$

Étudions la fonction g' pour trouver son signe. Par différence, g' est dérivable sur $[-\pi,\pi]$.

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad g''(x) = -\cos(x)+1-\frac{x^2}{2} = f(x) \leqslant 0$$

La fonction g' est donc décroissante sur $[-\pi,\pi]$. Ainsi, on a :

x	$-\pi$		0		π
g'	$-\pi+\frac{\pi^3}{6}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\pi-\frac{\pi^3}{6}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^4}{24}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^4}{24}$

On en déduit que $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, donc $\boxed{\cos(x) \leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24} \text{ pour tout } x \in [-\pi,\pi].}$

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-\pi,\pi], \quad 1-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}.}$

2. Soit $x \in [-\pi,\pi]$, $x \neq 0$. On vient de voir que

$$1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

donc

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)-1 \leqslant -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

donc, puisque $x^2 > 0$:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\cos(x)-1}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{24}\right) = -\dfrac{1}{2}$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$