

**DEVOIR MAISON 1**

À rendre le jeudi 3 septembre 2020

**Exercice 1**

On considère la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x)$ .

- Étudier la limite de  $f$  en  $0^+$ .
- (a) Justifier que pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

- (b) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- (a) Pour tout  $x > 0$ , calculer  $f'(x)$ .  
(b) Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour  $x > 0$  (on fera un tableau).
- Dresser alors le tableau de variation de  $f$ .
- Donner, en français, les variations de  $f$ .

**Exercice 2**

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1<sup>er</sup> juin 2020.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du  $n$ -ième mois. On a  $u_0 = 20$ .

- (a) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 20$ .  
(b) Calculer  $u_1$  et  $u_2$  (*c'est le moment de s'entraîner au calcul de tête!*) et expliquer ce que cela signifie pour Maya.
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .
- Soit  $v_n = u_n - 80$ . De quel type est la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
- Quel calcul faudrait-il faire pour obtenir le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1<sup>er</sup> juin 2021 ? *On ne demande pas de faire ce calcul, en revanche il faut expliquer votre raisonnement.*
- Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 3**

Les deux questions sont indépendantes. On détaillera les calculs.

- Écrire sous forme algébrique  $z_1 = (1 + 2i)^2$  et  $z_2 = \frac{2 - 6i}{1 + 2i}$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $3z^2 - 2z + 1 = 0$ .