Devoir maison 1 – Corrigé

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x)$.

1. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x^2+1)=0$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ donc par différence

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty.}$$

2. (a) Soit $x>0$.

$$f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\ln\left(\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

donc

$$\boxed{f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right).}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$$

Remarque : la première forme de $f(x)$ ne permet pas de conclure car il y a une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».

3. (a) Soit $x>0$.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-(x^2+1)}{x(x^2+1)}$$

donc

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}.}$$

   (b) Pour $x>0$, on a $x(x^2+1)>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-1. Remarquons que $x^2-1=(x-1)(x+1)$. On a donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce qui donne le tableau de signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4. D'après ce qui précède, le tableau de variation de f est :

x	0		1		$+\infty$
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur }]0,1[\text{ et croissante sur } [1,+\infty[.}$

Exercice 2

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. À la fin du n-ième mois, Maya possède la somme u_n. Elle en dépense un quart soit $\frac{1}{4}u_n$ puis place 20 euros. Elle a donc, à la fin du mois suivant :

$$\boxed{u_{n+1}=u_n-\frac{1}{4}u_n+20=\frac{3}{4}u_n+20}$$

   (b) $\boxed{u_1=35}$: Maya a 35€ dans sa tirelire le 1er juillet 2020.
   $\boxed{u_2=\frac{184}{4}=46,25}$: Maya a 35€ dans sa tirelire le 1er août 2020.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Initialisation : $u_0 = 20 = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 20 = \frac{3}{4}\left(80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + 20 = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n,\ u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.}$$

3. Pour tout entier naturel n,

$$v_n = u_n - 80 = -60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } \frac{3}{4}}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = -60}$.

4. Au 1er juin 2021, il s'est écoulé 12 mois. Le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2020 est donné par $\boxed{u_{12} = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{12}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) - \left(80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\\
&= -60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\\
&= 60 \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(-\frac{3}{4} + 1\right)\\
&= 15 \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

6. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 80.}$$

Après un grand nombre de mois, les économies de Maya seront proches de 80 euros.

Exercice 3

Les deux questions sont indépendantes. On détaillera les calculs.

1. $z_1 = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i + (2i)^2 = -3 + 4i$.
$z_2 = \frac{2 - 6i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 6i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - 4i - 6i + 12i^2}{1^2 + 2^2} = \frac{-10 - 10i}{5} = -2 - 2i$.
Donc

$$\boxed{z_1 = -3 + 4i \quad\text{et}\quad z_2 = -2 - 2i.}$$

2. Résolvons $3z^2 - 2z + 1 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. Les solutions de l'équation sont donc

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{2 - i\sqrt{8}}{6} = \frac{1 - i\sqrt{2}}{3} \quad\text{et}\quad \alpha_2 = \overline{\alpha_1} = \frac{1 + i\sqrt{2}}{3}.}$$

Corriger cette réponse (récurrence)

Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 80 - 60 \times \frac{3}{4}^n$.

Initialisation : $u_0 = 80 - 60 \times \frac{3}{4}^0 = 20$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 80 - 60 \times \frac{3}{4}^n$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + 20 \\
&= \frac{3}{4}\left(80 - 60 \times \frac{3}{4}^n\right) + 20 \\
&= 60 - 60 \times \frac{3}{4}^{n+1} + 20 \\
&= 80 - 60 \times \frac{3}{4}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_n = 80 - 60 \times \frac{3}{4}^n.}$$

Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Initialisation : $u_0 = 20$ et $80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 20$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + 20 \\ &= \frac{3}{4}\left(80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + 20 \\ &= 60 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 20 \\ &= 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.}$$