Révisions CB1

Corrigé

1 Algèbre

Exercice 1 On applique l'une des deux méthodes du cours :

- tranformation de la matrice $(C|I_3)$ par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice ;
- ou alors on montre que le système $CX = B$ a une unique solution pour tout $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Résultat : $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3/4 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 1. Division euclidienne de $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $X^2 - 1$: on trouve

$$X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4 = \underbrace{(X^3 - X^2 + 3X)}_{Q(X)}(X^2 - 1) + \underbrace{4 + 3X}_{R(X)}$$

2. Soient R et Q le reste et le quotient de la division euclidienne de X^n par $(X - 3)(X - 2)$. On a $\deg(R) < \deg((X - 3)(X - 2)) = 2$, donc R est de la forme : $R(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}$.

$$X^n = Q(X)(X - 3)(X - 2) + aX + b$$

En évaluant en 3 et en 2, on obtient

$$\begin{cases} 3^n = 3a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 3^n - 2^n & (L_1 - L_2) \\ b = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & (3L_2 - 2L_1) \end{cases}$$

On a donc $R(X) = (3^n - 2^n)X + 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

3. $P(-1) = 0$ donc $X + 1$ divise P. On réalise la division euclidienne et on trouve $P = (X + 1)(2X^2 - 5X - 3)$. Puis, $P = 2(X + 1)(X + \frac{1}{2})(X - 3)$.

Exercice 3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k + 1) = \frac{1 + (2n + 1)}{2}(n + 1) = (n + 1)^2$ (suite arithmétique).

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{10}{k}3^{10-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{10}{k}1^k \cdot 3^{10-k} - \binom{10}{0}1^0 \cdot 3^{10-0} = (1 + 3)^{10} - 3^{10} = 4^{10} - 3^{10}$, d'après la formule du binôme de Newton.

Exercice 4 Méthode 1 : Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k! \leqslant n!$. Par somme,

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n + 1)n! = (n + 1)!$$

Méthode 2 : récurrence (beaucoup plus long).

Exercice 5 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. $\det(P) = -4 \neq 0$ donc P est inversible (matrice 2×2) et $P^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2. On calcule le produit : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Montrons par récurrence que que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   - Initialisation : $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.
  De plus $D = P^{-1}AP$, donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$. Alors
  $$A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a, puisque D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. Il reste à réaliser le produit.
   On trouve
   $$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(-3)^n}{2} & \dfrac{1-(-3)^n}{2} \\ \dfrac{1-(-3)^n}{2} & \dfrac{1+(-3)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On montre que $(A+I_3)(A-2I_3) = 0_3$ par calcul direct. On en déduit que $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$ après développement. On a donc
   $$A\underbrace{\left(\frac{1}{2}(A-I)\right)}_{B} = I_3$$
   Donc A est inversible et $A^{-1} = B$, c'est-à-dire
   $$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   Attention : ne pas parler de A^{-1} avant d'avoir justifié que A est inversible. D'où l'introduction de la matrice B, qui n'est pas appelée A^{-1} tout de suite.
2. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que
   $$A^n = a_nA + b_nI_3$$
   - Initialisation : $A^0 = I_3 = 0.A + 1.I_3$ on peut donc poser $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$.
     $$A^{n+1} = A^nA = a_nA^2 + b_nA$$
     Or, $A^2 = A + 2I_3$ d'après la question 1. On a donc
     $$A^{n+1} = (a_n + b_n)A + 2a_nI_3$$
     En posant $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, on a bien $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$.
   - Par principe de récurrence, on a montré que, en définissant les suites (a_n) et (b_n) par :
     $$\begin{cases} a_0 = 0,\ b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$
     on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_3$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$, donc (a_n) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $(EC) : x^2 - x - 2 = 0$ de racines -1 et 2. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$
   Or
   $$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$$
4. Il reste à déterminer b_n.
   $$\forall n \geqslant 1, b_n = 2a_{n-1} = -\frac{2}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2}{3}2^{n-1}$$
   D'où
   $$\forall n \geqslant 0, b_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$$
   en remarquant que $(-1)^{-1} = -1$ et que la formule est toujours vraie au rang $n = 0$ $(b_0 = 1)$.
   On en déduit que
   $$A^n = a_nA + b_nI_3 = \left(-\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right)A + \left(\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right)$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 7 On souhaite résoudre l'équation $(E) \quad : \quad 6P(X) - (X^2+1)P''(X) = 0$ par analyse-synthèse.

1. Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ une solution de (E). Notons $d = \deg(P)$.
   Soit $d \leqslant 1$, soit $d \geqslant 2$.
   Si $d \geqslant 2$, $\deg(P'') = d-2$, donc $\deg((X^2+1)P''(X)) = 2+(d-2) = d = \deg(6P(X))$. On est dans le cas où on ajoute deux polynômes de même degré. Pour que le résultat soit égal au polynôme nul, les coefficients dominant doivent s'annuler.
   Soit $a_d \neq 0$ le coefficient dominant de P.
   Le coefficient dominant de $6P(X)$ est $6a_d$.
   Le coefficient dominant de $P''(X)$ est $d(d-1)a_d$, qui est aussi celui de $(X^2+1)P''(X)$ (les coefficients dominants sont multipliés).
   Donc
   $$6a_d - d(d-1)a_d = 0 \text{ donc } 6 - d^2 + d = 0 \text{ donc } d = 3 \text{ ou } d = -2$$
   La deuxième solution étant impossible, on en déduit que $d = 3$.

   Dans tous les cas, $d \leqslant 3$ (on n'a pas traité explicitement $d \leqslant 1$, mais ce cas vérifie de manière évidente $d \leqslant 3$).

2. Synthèse : Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Notons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3$.

   On a : $P''(X) = 2c + 6dX$.

$$\begin{aligned} 6P(X) - (X^2+1)P''(X) = 0 &\Leftrightarrow 6(a + bX + cX^2 + dX^3) - (X^2+1)(2c+6dX) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6a - 2c + (6b-6d)X + (6c-2c)X^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2c = 0 \\ 6b - 6d = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = d \\ c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = dX + dX^3 \\ &\Leftrightarrow P = d(X + X^3) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{P = d(X+X^3), d \in \mathbb{R}\}$.

2 Analyse

Exercice 8 1. ▷ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

▷ $v_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc, puisque $\dfrac{n}{n^2+1} \geqslant 0$, on obtient

$$-\frac{n}{n^2+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$

Or, $\dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

▷ $w_n = \dfrac{3^n+2^n}{5^n-1} = \dfrac{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)}{5^n(1+(\frac{1}{5})^n)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \dfrac{1+(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{1}{5})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
car $\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}$ appartiennent à $]-1,1[$.

2. (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
   $x = 3x + 1 \leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
   Soit $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Montrons que (v_n) est géométrique de raison 3.
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3v_n$$
   Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. On a donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{5}{2}3^n \text{ donc } u_n = \frac{5}{2}3^n - \frac{1}{2}$$

3. (u_n) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   L'équation caractéristique est : $(EC) : x^2 - 2x - 3 = 0$. Ses racines sont 3 et -1.
   D'après le cours, il existe un unique couple (λ, μ) tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda 3^n + \mu(-1)^n$$
   De plus,
   $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 3\lambda - \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{5}{4} \\ \lambda = \frac{3}{4} \end{cases}$$
   Ainsi,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{4} \times 3^n + \frac{5}{4} \times (-1)^n$$

Exercice 9 Soit $f\colon x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ (car $x^2 \geqslant 0$), donc par encadrement,
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$$
   On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto x^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composée puis produit, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Étudions f en 0.
   Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, f est continue en 0 (en a fait en sorte que ceci soit vrai dans la question 1).
   Dérivabilité en 0 : soit $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
   Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   Continuité de f' en 0 : après calcul de la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   On procédant comme précédemment,
   $$\lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
   Cependant, $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand $x \underset{0}{\longrightarrow}$ (car sinus n'a pas de limite en $\pm\infty$). Ceci signifie que f' n'est pas continue en 0
   Conclusion : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ uniquement.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{1 + x^n}{(1+x)^n} = \dfrac{\frac{1}{x^n} + 1}{\left(\frac{1}{x} + 1\right)^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est une fraction rationnelle et que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x)^{n-1}(1+x^n)}{(1+x)^{2n}} \\ &= \frac{nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n)}{(1+x)^{n+1}} \\ &= \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$
   Or, $x^{n-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{2^{n-1}}$	$\nearrow$	1

2. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{donc} \qquad (1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$$

Exercice 11 Soit $f\colon x \mapsto \sqrt{2x+3}$.

1. (a) $x \mapsto 2x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) donc sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geqslant 0$, $2x+3>0$. Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, par composée f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   $$f(x) = x \Leftrightarrow 2x+3 = x^2 \ \text{ (car } x \mapsto x^2 \text{ est injective sur } \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$$

   L'équation $x^2-2x-3=0$ a pour discriminant $\Delta = 4^2$ et pour racines $-1<0$ et $3>0$. Donc elle admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ qui est $\alpha = 3$.

   (c)
   $$0 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow 3 \leqslant 2x+3 \leqslant 9 \Rightarrow \sqrt{3} \leqslant f(x) \leqslant 3$$

   car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit donc que, pour tout $x \in I = [0,3]$, $f(x) \in [0,3]$ (et même $[\sqrt{3},3]$).

   (d) Soit $x \in I$. f est dérivable sur I et

   $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

   Or, on vient de le voir, $\sqrt{3} \leqslant f(x)$, donc par passage à l'inverse de ces nombres positifs (la fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$),

   $$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   Puisque $|f'(x)| = f'(x)$ ici, on a bien pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   (e) f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

   $$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|x-y|$$

   En prenant ici $y = \alpha \in I$ (car $\alpha = 3$) qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$, on a

   $$\forall x \in I, \quad |f(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|x-\alpha|$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$.

   (a) Démontrons par récurrence que la propriété

   $$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_n \text{ existe et } u_n \in I$$

   est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - Initialisation : $u_0 = 1$ existe et appartient à $I = [0,3]$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. u_n existe et est dans I. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et appartient à I d'après la question 1.c. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$u_{n+1}-u_n = \sqrt{2u_n+3}-u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+3}-u_n)(\sqrt{2u_n+3}+u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n} = \frac{2u_n+3-(u_n)^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

   Or, $\sqrt{2u_n+3}+u_n > 0$ car $u_n \in I$ et $2u_n+3-(u_n)^2 \geqslant 0$ car on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

   (c) (u_n) est croissante et majorée par 3 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ on a, par passage à la limite : $0 \leqslant \ell \leqslant 3$. De plus, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Puisque (u_n) converge vers ℓ, (u_{n+1}) également (suite extraite). De plus, f est continue en ℓ donc

   $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

   On en déduit donc que $\ell = f(\ell)$. Or l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\alpha = 3$ dans $\mathbb{R}_+$, donc

   $$(u_n) \text{ converge vers } 3.$$

(d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

- Initialisation : $u_0 = 1$ donc $|u_0 - \alpha| = |1-3| = 2 \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$. En appliquant la question 1.e,

$$u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - \alpha - \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|u_n - \alpha| \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

(e) Si $2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \leqslant 10^{-3}$, alors d'après le résultat précédent, on aura $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$. Cherchons donc un tel n.

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow \ln(2) - n\ln(\sqrt{3}) \leqslant -3\ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{3\ln(10)+\ln(2)}{\ln(\sqrt{3})}$$

À partir du rang $n = \left\lfloor \frac{3\ln(10)+\ln(2)}{\ln(\sqrt{3})} \right\rfloor + 1$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$. Ceci donne $n = 14$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$. f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(n\ln(x)+1)$. Pour $x > 0$, $x^{n-1} > 0$ et

$$n\ln(x) + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$$

par stricte croissance de exp. f_n est donc strictement décroissante sur $]0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}]$ et strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -1 < 0$ par croissance comparée. Donc sur $]0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}]$, f_n est strictement négative (car elle y est décroissante, majorée par -1) et l'équation $f_n(x) = 0$ n'y admet par de solution.

Sur $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante. On a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant e^0 = 1$, donc $1 \in [\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$.
De plus, $f(1) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in [-1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique sur $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$, qui est plus précisément située dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On note cette solution x_n.

2. On sait que, pour tout n, $f_n(x_n) = 0$ (c'est-à-dire $(x_n)^n\ln(x_n) = 1$) et que $x_n \geqslant 1$.

$f_{n+1}(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_n) = 0 - \big((x_n)^{n+1}\ln(x_n) - 1\big) = -(x_n)^n\ln(x_n) \times x_n + 1 = -1 \times x_n + 1 =$

Donc
$$f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n)$$

Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$x_{n+1} \leqslant x_n$$

La suite (x_n) est donc décroissante. De plus, elle est minorée par 1 donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.
Par l'absurde, si $\ell > 1$, alors puisque ℓ est un minorant de la suite (x_n) (théorème de la limite monotone), on a

$$(x_n)^n\ln(x_n) \geqslant \ell^n\ln(\ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ceci est absurde car $(x_n)^n\ln(x_n) = 1$. On en déduit que $\ell = 1$.

3 Probablités

Exercice 13 1. Notons R_k :« la place est réservé le jour k ». On a : $P(R_k) = r_k$, $P_{R_k}(R_{k+1}) = \frac{9}{10}$ et $P_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
De plus $(R_k, \overline{R_k})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= P(R_{k+1}) \\ &= P(R_k)P_{R_k}(R_{k+1}) + P(\overline{R_k})P_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) \\ &= r_k \times \frac{9}{10} + (1-r_k) \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2}r_k + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. (r_k) est une suite arithmético géométrique.
$x = \frac{1}{2}x + \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$.
Posons alors $v_k = r_k - \frac{4}{5}$. Pour tout k,
$v_{k+1} = \frac{1}{2}r_k + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}r_k - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}(r_k - \frac{4}{5}) = \frac{1}{2}v_k$. Ainsi, la suite (v_k) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{4}{5}$.
Pour tout k, $v_k = -\frac{4}{5} + \frac{1}{2^k}$ donc $r_k = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2^k}$.

3. $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k = \frac{4}{5}$. Après un grand nombre de jours, la place aura une probabilité proche de $\frac{4}{5}$ d'être réservée.

Exercice 14 On note A_k l'événement : « le joueur touche la cible 1 au k-ième tir », B_k l'événement : « le joueur touche la cible 2 au k-ième tir » et G l'événement : « le joueur gagne ».
On a : $P(A_k) = p$ et $P(B_k) = q$.

1. Stratégie 1 : le joueur tire en premier sur la cible 1.
Alors $G = (A_1 \cap B_2) \cup (\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$. Or, les événements $(A_1 \cap B_2)$ et $(\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$ sont incompatibles, donc

$$P(G) = P(A_1 \cap B_2) + P(\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$$

De plus, A_1 et B_2 (respectivement $\overline{A_1}$, B_2 et A_3) sont mutuellement indépendants (car les tirs sont indépendants) donc

$$P(G) = P(A_1)P(B_2) + P(\overline{A_1}_P(B_2)P(A_3) = pq + (1-p)qp = pq(2-p)$$

2. Stratégie 2 : le joueur tire en premier sur la cible 2. Alors $G = (B_1 \cap A_2) \cup (\overline{B_1} \cap A_2 \cap B_3)$. Par le même raisonnement que précédemment,

$$P(G) = P(B_1)P(A_2) + P(\overline{B_1}_P(A_2)P(B_3) = qp + (1-q)pq = pq(2-q)$$

3. On a $q < p$ donc $2 - q > 2 - p$ et donc la probabilité de gagner avec la stratégie 2 et plus forte. Conclusion : il faut commencer par la cible la plus difficile (car le fait de manquer la première cible n'est pas éliminatoire. En revanche, il faudra forcément réussir le 2e tir).

Exercice 15 Notons U_k : « on choisit l'urne U_k » et N :« On tire une boule noire ».

1. $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est un système complet d'événements donc $\sum\limits_{k=1}^{n} P(U_k) = 1$. On a donc $1 = \sum\limits_{k=1}^{n} ka = a\sum\limits_{k=1}^{n} k = a\frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi

$$a = \frac{2}{n(n+1)}.$$

2. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$

$$P(N) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k)P_{U_k}(N) = \sum_{k=1}^{n}\left(ka \times \frac{k}{n}\right) = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n^2(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P(N) = \frac{2n+1}{3n}$$

3. On cherche $P_N(U_3)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_N(U_3) = \frac{P(U_3)P_{U_3}(N)}{P(N)} = \frac{3a \times \frac{3}{n}}{\frac{2n+1}{3n}} = \frac{27a}{2n+1} = \frac{54}{n(n+1)(2n+1)}$$