# TD – AN5

## DÉRIVATION

## Applications directes du cours

**ADC1** Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de $f\colon x \mapsto x|x|$.

**ADC2** Déterminer la limite quand $x \to 1$ de $\dfrac{e^x - e}{x-1}$.

**ADC3** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x < 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**ADC4** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $f$, son domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ puis calculer l'expression de $f'$.

1. $f\colon x \mapsto x\,e^{x^2+1}$
2. $f\colon x \mapsto \ln(x^2-1)$
3. $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.
4. $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$
5. $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
6. $f\colon x \mapsto \cos(x^2) - \sin(x^3)$
7. $f\colon x \mapsto \text{Arctan}(e^{2x})$
8. $f\colon x \mapsto 2^x$

**ADC5** Sur quel domaine $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ ?

**ADC6** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
On note $g : [-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la réciproque associée.
Montrer que $g$ est dérivable sur $]-1,1[$ uniquement et déterminer l'expression de $g'$.

## Exercices

**Exercice 1** Soit $f\colon \begin{array}{ccc} ]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x(1-x)}\right) \end{array}$.

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in ]0,1[$.
2. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1. On notera toujours $f$ le prolongement, préciser $f(0)$ et $f(1)$.
3. Justifier que $f(1-x) = f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
4. (a) Justifier que pour tout $x \in ]0,1[$, il existe $c_x \in ]0,x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c_x)$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1$. Qu'est-ce que cela signifie pour $f$ ?
   (c) Déduire de cette limite que $f$ est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
5. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

**Exercice 2** **Exercice très (très !) classique**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$

4. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|.$$

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

## Pour aller plus loin

**Exercice 3** En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout $t > 0$,
$$\frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$

**Exercice 4** On pose $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Soit $f$ la fonction définie sur $]-a, a[$ par $f(x) = \tan(x^2)$.

Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0, a[$ sur $\mathbb{R}_+$ et étudier la continuité puis la dérivabilité de sa réciproque.

**Exercice 5** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ $(0 < a < b)$.

1. Soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x_0$ passe par l'origine si et seulement si $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

2. En utilisant le théorème de Rolle et la fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$, montrer qu'il existe un point de la courbe représentative de $f$ où la tangente passe par l'origine.