ANS : Corrigé des PAPL

Exercice 3

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

sur $I = [t, t+1]$

→ $f = \ln$ est dérivable

→ $\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc $\frac{1}{t+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{t}$

D'après l'inégalité des accroissements finis (avec $a = t$ et $b = t+1$)

$$\frac{1}{t+1}(t+1-t) \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}(t+1-t)$$

$$\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}$$

Exercice 4

Sur $[0, a[$:

→ f est continue et dérivable car $x \mapsto x^2$ l'est et $x^2 \in [0, a^2[= [0, \frac{\pi}{2}[$ avec $\tan$ dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

→ $f'(x) = 2x\left(1 + \tan^2(x)\right) \geq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

donc f est strictement croissante sur $[0, a[$

→ $f(0) = 0$. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty$

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0, a[$ sur $[0, +\infty[$.

Notons g la réciproque associée. Le théorème de la bijection dit aussi que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Dérivabilité de g sur $\mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Notons $y = g(x) \in [0, a[$. On a $x = f(y)$

→ si $x \neq 0$, alors $y \neq 0$ et $f'(y) \neq 0$ donc g est dérivable en $x \neq 0$

→ si $x = 0$, alors $y = 0$ et $f'(g) = 0$ donc g n'est pas dérivable en $x = 0$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement

Exercice 5

1) La tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est $T_{x_0} : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

T_{x_0} passe par l'origine $\iff (0,0) \in T_{x_0}$

$\iff 0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

$\iff x_0 f'(x_0) = f(x_0)$

2) . $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $[a,b]$ (car $0 \notin [a,b]$)

. $g(a) = \dfrac{f(a)}{a} = 0$ et $g(b) = \dfrac{f(b)}{b} = 0$.

. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$

tel que $g'(c) = 0$

Or $g'(c) = \dfrac{f'(c)\,c - f(c)}{c^2}$

$g'(c) = 0 \iff f'(c)\,c = f(c)$

$\iff T_c$ passe par $(0,0)$ d'après 1)