TD ANS : Exercices

Exercice 1

1) . Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

. $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$ est rationnelle donc de classe C^1 sur

$\{x \in \mathbb{R} \mid x(1-x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. donc sur $]0,1[$

Donc, <u>f est de classe C^1 sur $]0,1[$</u>

$\forall x \in]0,1[$, $\quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

$u(x) = \dfrac{1}{x-x^2}$ donc $u'(x) = -\dfrac{1-2x}{(x-x^2)^2}$

$$f'(x) = -\frac{1-2x}{(x(1-x))^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^2}$$

$$= -\frac{1-2x}{(x(1-x))^2+1}$$

$$= \frac{2x-1}{(x-x^2)^2+1}$$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$ car

x		0		1	
$x(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

et $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

f est prolongeable par continuité en 0 et 1 en posant

$f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

3) si $x \in]0,1[$, $1-x \in]0,1[$

donc $$f(1-x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{(1-x)(1-(1-x))}\right)$$

$$= \text{Arctan}\left(\frac{1}{(1-x)x}\right)$$

$$= f(x).$$

si $x = 0$, $1-x = 1$ et $f(x) = \frac{\pi}{2} = f(1-x)$

si $x = 1$: $1-x = 0$ donc idem

Conclusion : $\forall x \in [0,1]$, $f(1-x) = f(x)$

4) a) f est dérivable sur $]0,x[$ (car C^1) et continue sur $[0,x]$ (par 1) et 2)) donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

b) $0 < c_x < x$ donc par encadrement, $\lim_{x \to 0^+} c_x = 0^+$.

$$f'(c_x) = \frac{2c_x - 1}{(c_x - c_x^2) + 1} \xrightarrow[c_x \to 0^+]{} \frac{-1}{1} = -1$$

Donc
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\underline{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -1}$

c) En 1

$$\Delta_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

Posons $h = 1-x \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^+$

$$\Delta_1(x) = \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \frac{f(h) - f(1)}{-h} \quad \text{par 3)}$$

$$\xrightarrow[h \to 0^+]{} -(-1) \quad \text{d'après b)}$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$

5) - f est C^1 sur $]0,1[$

- f est dérivable sur $[0,1]$

- <u>Continuité de f' en 0 et en 1 :</u>

$\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{(x-x^2)^2+1}$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} -1 = f'(0)$$

et $\quad f'(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \dfrac{1}{1} = 1 = f'(1)$

Donc f' est continue en 0 et en 1.

<u>Conclusion</u> : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

Exercice 2

1) . $x \mapsto 1+e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $1+e^{-x} > 1 > 0$.

. ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Donc, par composée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x} \times e^{x}}{(1+e^{-x}) \times e^{x}} = \frac{-1}{e^{x}+1}$$

$f'(x) \leq 0$ donc $|f'(x)| = -f'(x)$

$$= \frac{1}{e^{x}+1}$$

$\forall x \geq 0$, $e^{x} \geq 1$ donc $e^{x}+1 \geq 2$

donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ par décroissance

de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

2) Notons $g : x \mapsto f(x) - x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par différence.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$ $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-1}{e^{x}+1} - 1 < 0$

Donc g est <u>strictement décroissante</u> sur $\mathbb{R}_+$ et elle y est <u>continue</u> (car $\mathcal{C}^1$).

$g(0) = f(0) = \ln(2) > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Puisque <u>$0 \in]-\infty, \ln(2)]$</u>, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'après le théorème de la bijection.

Puisque $g(x) = 0 \iff f(x) = x$, on a montré que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

3) $\cdot$ f est dérivable (car $\mathcal{C}^1$) sur $I = \mathbb{R}+$.

$\cdot$ $\forall x \in \mathbb{R}+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour

tous $\begin{cases} a = \alpha \in \mathbb{R}+ \\ b = x \in \mathbb{R}+ \end{cases}$

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x-\alpha|$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}+, \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x-\alpha|$$

4) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Initialisation : Pour $n=0$, $\frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \geqslant |u_0 - \alpha|$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

Alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &= |f(u_n) - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad \text{par 3)} \end{aligned}$$

En effet, on a bien $u_n \in \mathbb{R}+$ car $u_0 = 0 \in \mathbb{R}+$

et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \ln\big(1 + \underbrace{e^{-u_{n-1}}}_{>0}\big) > \ln(1) = 0$

Or $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$ donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| = 0$ donc d'après un corollaire du théorème

d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \alpha) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$