TD AN5 : ADC

ADC 1

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Donc par produit, f est <u>dérivable sur $\mathbb{R}^*$</u>.

<u>En 0</u>

Soit $x \neq 0$. $\quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x|x|}{x} = |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \in \mathbb{R}$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

ADC2

- exp est dérivable en 1 donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e^1}{x - 1} = \exp'(1) = e.$$

- <u>ou</u> : on pose $h = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$$\frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e^{1+h} - e}{h} = e \times \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} e \times 1 = e$$ par taux d'accroissement usuel

ADC3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

<u>Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$</u>

- Sur $]-\infty, 1[$, $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$, polynomiale donc f est dérivable sur $]-\infty, 1[$
- idem, sur $]1, +\infty[$, f est polynomiale donc dérivable
- f est <u>dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$</u>, donc elle y est aussi <u>continue</u>.

En 1 : $f(1) = 2 - 1 = 1$.

* Continuité

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 2 - 1 = 1 = f(1)$$

Donc f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$

* Dérivabilité

Soit $x < 1$:
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{3 - x^2}{2} - 1}{x - 1}$$
$$= \frac{1 - x^2}{2(x - 1)}$$
$$= \frac{\cancel{(1 - x)}(1 + x)}{-2\cancel{(1 - x)}}$$
$$= \frac{1 + x}{-2}$$
$$\xrightarrow[x \to 1^-]{} -1$$

Soit $x > 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{2 - x - 1}{x - 1} = \dfrac{1 - x}{x - 1} = -1 \xrightarrow[x \to 1^+]{} -1$

Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \in \mathbb{R}$

Ainsi f est dérivable en 1 donc sur $\mathbb{R}$.

Rq : La continuité en 1 était inutile, elle se déduit de la dérivabilité en 1.

ADC 4

1) $f : x \mapsto x e^{x^2 + 1}$.

$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto e^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composée et produit, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{x^2 + 1} + 2x^2 e^{x^2 + 1} = e^{x^2 + 1}(1 + 2x^2)$

2) $f : x \mapsto \ln(x^2-1)$

$x \mapsto x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $\ln$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composée, f est définie et dérivable sur :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1>0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.

$x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par quotient, f est définie et dérivable sur

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) \neq 0\} =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$

4) f rationnelle donc définie et dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\}$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

5) $f : x \to \sqrt{1-x^2}$

$x \mapsto 1-x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composée, f est définie sur

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\} = [-1,1]$$

et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2>0\} =]-1,1[$$

$\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

Étudions la dérivabilité en 1 et en -1.

Soit $x \in]-1, 1[$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x-1}$$

Posons $h = 1-x \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^+$

x		1	
$1-x$	+	ϕ	−

(Avec $\sqrt{\ }$, mieux vaut avoir des nombres ≥ 0)

$x < 1$ donc $h > 0$, $x = 1-h$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-(1-h)^2}}{-h}$$

$$= -\frac{\sqrt{2h - h^2}}{h}$$

$$= -\frac{\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h} \qquad \text{car } h > 0, \ 2-h > 0$$

$$= -\frac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}} \qquad \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\xrightarrow[h \to 0^+]{} -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable en 1.

Puisque f est paire ($f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$),
f n'est pas dérivable en -1 non plus.

Conclusion : $\mathcal{D}' =]-1, 1[$.

6) $f : x \mapsto \cos(x^2) - \sin(x^3)$.

$\cos$, $\sin$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}.$$

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $f'(x) = -2x \sin(x^2) - 3x^2 \cos(x^3)$

7) $f : x \mapsto \text{Arctan}(e^{2x})$

$x \mapsto \text{Arctan}$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $\quad f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1+(e^{2x})^2} = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$

8) $f : x \mapsto 2^x = \exp\left(x\ln(2)\right)$

$x \mapsto x\ln(2)$ et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc

$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $\quad f'(x) = \ln(2)\exp\left(x\ln(2)\right) = \ln(2)\,2^x$.

ADCS

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

$x \mapsto x^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ l'est sur $]0,+\infty[$

donc <u>f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$</u>

<u>En 0</u> : $f(0) = 0$.

* <u>Dérivabilité en 0</u> :

Soit $x>0$, $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\ln(x)}{x} = x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \in \mathbb{R}$

par croissance comparée

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

* <u>Continuité de f' en 0</u> :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln(x)+x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \qquad \text{car } f'(0)=0$$

si $x>0$, $\quad f'(x) = 2x\ln(x)+x$

$\xrightarrow[x\to 0]{} 2\times 0+0=0$ par la même croissance comparée.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue en 0

<u>Conclusion</u> : <u>f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$</u>

AOC 6

$f : x \mapsto \sin(x)$. est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $J = [f(\frac{-\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$.

On note $g : J \to I$ la réciproque associée.

Soit $b \in J = [-1, 1]$. Notons $a = g(b) \in I$.

On a $f(a) = b$ (i.e $\sin(a) = b$).

$f'(a) = \cos(a)$.

* si $a \neq \pm \frac{\pi}{2}$ (i.e $b \neq \pm 1$), alors $f'(a) \neq 0$ donc g est dérivable en b et

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\cos(a)}.$$

Or $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a) = 1 - b^2$

et $\cos(a) \geq 0$ car $a \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc $\cos(a) = \sqrt{1-b^2}$

$$g'(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

* si $a = \pm \pi/2$, ie $b = \pm 1$, $f'(a) = 0$ donc g n'est pas dérivable en -1 et 1

Conclusion : g est dérivable sur $]-1, 1[$ uniquement et

$\forall x \in]-1, 1[$, $$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$