

TD – AN4

CONTINUITE

Applications directes du cours

ADC1 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad x \longmapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

ADC2 Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Justifier que f est continue sur $]0, 1[$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en 0 ?

ADC3 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Justifier que f est continue sur \mathbb{R}^* .
2. f est-elle prolongeable par continuité sur en 0 ?

ADC4 Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \sqrt{2x-4}$ réalise une bijection de $[2, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ et déterminer l'expression de la fonction réciproque associée.

ADC5 Démontrer que la fonction $g: x \mapsto e^{-x} + x$ réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ dans un intervalle à déterminer. On note φ la réciproque associée. Dresser son tableau de variation.

ADC6 Dresser le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto \text{Arctan}(1-x^2)$.

Exercices

Exercice 1 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante.

Exercice 2 Soit $f: x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$.

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On note $f_n : x \mapsto e^x - nx$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $]-\infty, \ln(n)]$ et une unique solution v_n sur $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.
4. Soit $n \geq 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante, égale à 1 ou -1 .

- Exercice 6**
1. Exprimer $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
 2. Calculer $A = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(8)$.
 3. Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x - 3) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x + 3)$. Étudier les variations de f .
 4. Résoudre l'équation $\text{Arctan}(x - 3) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x + 3) = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 7 Résoudre l'équation $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.