

Exercice 1

1) Par récurrence.

Initialisation : $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f(x).$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) && \text{d'après l'énoncé} \\ &= f(x) && \text{par H.R.} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$

2) $u_n = \frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or, par continuité de f en 0, $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0).$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(0).$

or $f(u_n) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ et f est constant.

Exercice 2

soit $g : x \mapsto f(x) - x = \frac{e^{-x}}{x} - x.$

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$

$$g'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x - e^{-x}}{x^2} - 1$$

$$= -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2} - 1$$

$$\leq -1 < 0 \quad \text{car} \quad e^{-x} > 0, \quad x+1 \geq 0, \quad x^2 > 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[.$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ par opérations usuelles

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ idem.

Ainsi :

→ g est continue (car dérivable) sur $]0, +\infty[$

→ g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

→ $0 \in]-\infty, +\infty[=]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

Or $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

Donc $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

Exercice 3

1) f_n est dérivable sur \mathbb{R} .

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ car $n > 0$

• et $f_n(x) = e^x \left(1 - n \frac{x}{e^x} \right)$ et $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = e^x - n$

$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq n \Leftrightarrow x \geq \ln(n)$

par stricte croissance de \ln sur $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$	$\ln(n)$	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	0	+
f_n	$+\infty$	$f_n(\ln(n))$	$+\infty$

et $f_n(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - n \ln(n) = n - n \ln(n) = n(1 - \ln(n))$

On a, pour $n \geq 3$:

$\rightarrow f_n$ est continue sur $] -\infty, \ln(n)]$

$\rightarrow f_n'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions

f_n est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(n)]$.

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$

$f_n(\ln(n)) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $n > 0$ et $\ln(n) > 1$ ($n \geq 3$)

D'après le théorème de la bijection,

l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $] -\infty, \ln(n)]$.

On procède de même sur $[\ln(n), +\infty [$ pour justifier l'existence et l'unicité de α_n .

$$2) \quad u_n \in [\ln(n), +\infty[\quad \text{donc} \quad u_n \geq \ln(n).$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \quad \text{donc} \quad \text{par minoration} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$3) \quad f_n'(0) = 1 \geq 0 \quad \text{donc} \quad f_n(0) \geq f_n(u_n)$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]-\infty, 0]$ ($0 \leq \ln(n)$),

$$\underline{0 \leq u_n}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad f_{n+1}(u_n) &= e^{u_n} - (n+1)u_n \\ &= e^{u_n} - nu_n - u_n \\ &= f_n(u_n) - u_n \\ &= -u_n \quad \text{car } f_n(u_n) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{or } u_n \geq 0 \quad \text{donc} \quad f_{n+1}(u_n) \leq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Par stricte décroissante de f_{n+1} sur $]-\infty, \ln(n+1)]$

$$(\text{avec } u_n \leq \ln(n) \leq \ln(n+1)) \quad \text{on a :} \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

(u_n) est donc décroissante.

5) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $l \geq 0$.

6) Supposons par l'absurde que $l \neq 0$.

On a donc $l > 0$.

$$\text{on sait que } f_n(u_n) = 0 \quad \text{ie } e^{u_n} - nu_n = 0$$

$$nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{par produit}$$

$$e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^l \in \mathbb{R} \quad \text{donc} \quad e^{u_n} - nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Absurde.

$$\text{Donc } \underline{l = 0}$$

Exercice 6

$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue.

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$$

Posons $g: x \mapsto f(x) - x$ continue sur $[0,1]$ par différence.

$$g(0) = f(0) \geq 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \quad \text{car} \quad f(1) \leq 1.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.