

T.D AN4 : Corrigé des ADC

ADC 1

① * sur \mathbb{R}^* , $f(x) = e^{-1/x^2}$.

$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}^* et $x \mapsto e^x$ est continue sur \mathbb{R} donc par composition, f est continue sur \mathbb{R}^* .

* En 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 \neq f(0) \quad (\text{car } f(0) = 1)$$

Donc f n'est pas continue en 0.

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R}^* uniquement.

② * sur $]1, 2[$: $g(x) = \ln(x-1)$.

\ln est continue sur \mathbb{R}_+

$x \mapsto x-1$ est continue sur \mathbb{R} donc sur $]1, 2[$ et

$$\forall x \in]1, 2[, \quad x-1 > 0$$

Par composition, g est continue sur $]1, 2[$

* sur $]2, +\infty[$: $g(x) = (x-2)^2$ donc g y est polynomiale donc continue.

* En 1

$$g(1) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty \quad \text{par composition} \neq g(1)$$

Donc g n'est pas continue en 1

* En 2

$$g(2) = (2-2)^2 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 = 0 = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(x-1) = 0 = g(2)$$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} g(x) = g(2)$ \therefore g est continue en 2.

Conclusion : g est continue sur $]1, +\infty[$ uniquement.

ADC 2

1) \ln est continue sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto 1-x$ est continue sur \mathbb{R} donc sur $]0, 1[$. Pour tout $x \in]0, 1[$

$$0 < 1-x < 1$$

donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]0, 1[$

De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* donc sur $]0, 1[$.

Par produit, f est continue sur $]0, 1[$.

2) * En 0

$$\text{Posons } h = -x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+h)}{-h} = - \frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1$$

par tableau d'accroissement usuel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0

$$\text{en posant } f(0) = -1$$

* En 1 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Par composition puis quotient $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \notin \mathbb{R}$

donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

ADC 3

1) Sur $]0, +\infty[$

$$f(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$$

Par produit $x \mapsto x \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Puisque \exp est continue sur \mathbb{R} , f est continue sur $]0, +\infty[$.

Sur $] -\infty, 0[$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

$x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur \mathbb{R}^* .

Par somme et produit, f est continue sur $] -\infty, 0[$.

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R}^*

2) si $x > 0$ $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$

or $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissance comparée.

Par continuité de $x \mapsto e^x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{si } x < 0, \quad f(x) &= \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^x(e^x - 1)}{x} \\ &= e^x \times \frac{e^x - 1}{x} \end{aligned}$$

or $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ par
taux d'accroissement moyen.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.

Conclusion : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable

par continuité en 0.

ADC 4

$$f: x \mapsto \sqrt{2x-4}$$

* $x \mapsto 2x-4$ est définie sur \mathbb{R} donc sur $[2, +\infty[$ et

$$\forall x \geq 2, \quad 2x-4 \geq 2 \times 2 - 4 = 0.$$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$ donc par composition,

f est définie sur $[2, +\infty[$.

$$* \forall x \in [2, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{2x-4} \in [0, +\infty[.$$

* Soit $y \in [0, +\infty[$. Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = y$$

$$\Leftrightarrow 2x-4 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2+4}{2}$$

car $\sqrt{2x-4} \geq 0$ et $y \geq 0$

$$\text{or } y^2 \geq 0 \text{ donc } \frac{y^2+4}{2} \geq \frac{4}{2} = 2.$$

donc $f(x) = y$ admet bien une unique solution

dans $[2, +\infty[$.

donc f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ dans

$[0, +\infty[$ et la réciproque est

$$g: [0, +\infty[\longrightarrow [2, +\infty[\\ y \longmapsto \frac{y^2+4}{2}$$

ADCS

$$g: x \mapsto e^{-x} + x.$$

• Par somme, g est définie et dérivable sur \mathbb{R} . donc sur $]-\infty, 0]$

• Limite en $-\infty$

soit $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = e^{-x} (1 + xe^x) \quad \text{car} \quad \frac{x}{e^{-x}} = xe^x$$

$$\text{Or} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

• Variations

$$\forall x \leq 0, \quad g'(x) = -e^{-x} + 1$$

Or $-x \geq 0$ donc $e^{-x} \geq 1$ par croissance de exp.

$$\text{Donc} \quad g'(x) \leq 0.$$

De plus $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0
$g'(x)$		ϕ
g	$+\infty$	1

→ Puisque $g'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions,

g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

- De plus elle y est continue (car dérivable).

D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ dans $[g(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[= [1, +\infty[$.

Notons $\varphi: [1, +\infty[\longrightarrow]-\infty, 0]$ la réciproque associée

D'après le théorème, φ est continue et strictement
décroissante sur $[-1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

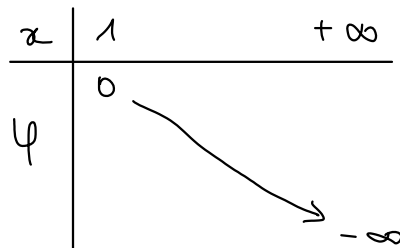
donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

$$g(0) = 1$$

donc

$$\varphi(1) = 0$$



ADC6

$$f: x \mapsto \operatorname{Arctan}(1-x^2).$$

- $x \mapsto 1-x^2$ et Arctan sont définies et dérivables sur \mathbb{R} donc f également.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1-x^2) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$

donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \times \frac{1}{1+(1-x^2)^2} \\ &= \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

or $1+(1-x^2)^2 > 0$ *Ne pas développer !*

donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\emptyset	$-$

f

$-\pi/2$ \nearrow $\pi/4$ \searrow $-\pi/2$

$$\begin{aligned} f(0) &= \operatorname{Arctan}(1) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$