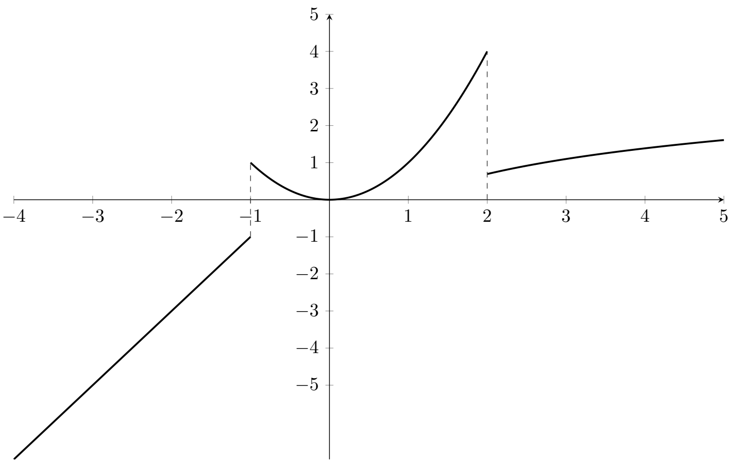
II.2 Continuité par morceaux

Définition

Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Exemple. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{si } -4 \leqslant x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 2 \\ \ln(x) & \text{si } 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$, définie sur $[-4, 5]$.



Ici, on peut découper $[-4, 5]$ en $-4 < -1 < 2 < 5$ ($a_0 = -4$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 5$).

- Sur $]-4, -1[$, $f(x) = 2x + 1$ donc f est continue et $x \mapsto 2x + 1$ admet des limites finies en $(-4)^+$ et $(-1)^-$, donc $x \mapsto 2x + 1$ est prolongeable par continuité sur $[-4, -1]$.
- De même sur $]-1, 2[$ et $]2, 5[$.

La fonction f est ici continue par morceaux.
Elle n'est pas continue car $\lim\limits_{x \to (-1)^-} = -1 \neq 1 = f(-1)$.

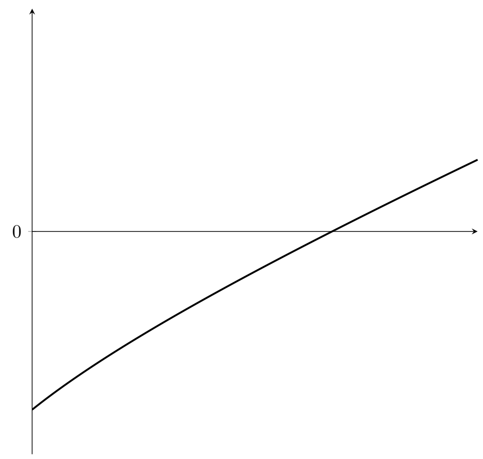
Théorème : des valeurs intermédiaires – cas particulier important

Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a,b[$ et telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ soient de signes strictement contraires. Alors f s'annule sur $]a,b[$.

Remarque. Si f est définie et continue en a, il est inutile de calculer une limite car on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Idem en b.

Démonstration. Idée de la démonstration : principe de dichotomie (sera revu en informatique).
Supposons $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. On crée deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Soit m_0 le milieu de $[a_0, b_0]$, on pose :
  - si $f(m_0) \geqslant 0$: $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. On a $f(a_1) \leqslant 0 \leqslant f(b_1)$.
  - si $f(m_0) < 0$: $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$. On a $f(a_1) \leqslant 0 \leqslant f(b_1)$.
- Soit m_1 le milieu de $[a_1, b_1]$, on pose :
  - si $f(m_1) \geqslant 0$: $a_2 = a_1$ et $b_2 = m_1$. On a $f(a_2) \leqslant 0 \leqslant f(b_2)$.
  - si $f(m_1) < 0$: $a_2 = m_1$ et $b_2 = b_1$. On a $f(a_2) \leqslant 0 \leqslant f(b_2)$.
- On réitère ce procédé.



À chaque étape, le segment est coupé en deux (d'où le terme de dichotomie) et on a $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$. On montre que les deux suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers un même réel $\ell \in]a,b[$ vérifiant $f(\ell) \leqslant 0 \leqslant f(\ell)$, d'où $f(\ell) = 0$. $\square$

Théorème : de la bijection continue

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors f réalise une bijection de I sur l'*intervalle* J donné par :

	f croissante	f décroissante
$I = [a, b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$I =]a, b]$	$J = \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$
$I = [a, b[$	$J = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a) \right]$
$I =]a, b[$	$J = \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x \to b-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$

En particulier, l'image de l'intervalle I par f est l'intervalle J donné ci-dessus.
De plus, la réciproque associée $g : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Courbe de la fonction arc-tangente – allure à retenir