

## TD5 – AN3

### LIMITES D'UNE FONCTION

#### Applications directes du cours

Étudier les limites des fonctions suivantes (si besoin, on séparera limite à gauche et à droite).

##### ADC1

1.  $x \mapsto x^5 + 5x^2 - e^x$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
2.  $x \mapsto \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-x^2}$  en 1 et  $-1$
3.  $x \mapsto \frac{x^2 + 2|x|}{x}$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$  et en 0.

##### ADC2

1.  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$  en 0
2.  $x \mapsto \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$  en  $+\infty$
3.  $x \mapsto \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$  en 4. *Factoriser ou alors, poser  $h = x - 4$ .*

##### ADC3

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x \mapsto \ln(x) \times \ln(\ln(x))</math> en 1</li> <li>2. <math>x \mapsto \frac{e^{x^2} - 1}{x}</math> en 0</li> <li>3. <math>x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{3}}}</math> en <math>+\infty</math></li> <li>4. <math>x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}</math> en 0.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>x \mapsto \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x</math> en <math>+\infty</math></li> <li>6. <math>x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}</math> en 0</li> <li>7. <math>x \mapsto \frac{e^x - e^3}{x - 3}</math> en 3.<br/><i>On pourra poser <math>h = x - 3</math>.</i></li> </ol> |
|---|--|

##### ADC4

 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en 0 ?

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$h: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{x e^x}{1 - e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

##### ADC5

1.  $x \mapsto x \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$  en 0
2.  $x \mapsto x(2 + \sin(x))$  en  $+\infty$ .

**Exercices****Exercice 1**

1. En posant  $h = x - 1$ , déterminer la limite en 1 de  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ .
2. Par une méthode analogue, déterminer la limite en  $\frac{\pi}{2}$  de  $x \mapsto \frac{8x^3 - \pi^3}{\cos(x)}$ .

**Exercice 2** Soit  $f: x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Exprimer  $f(x)$  pour  $x > 1$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Par une méthode analogue, étudier la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Encadrer  $f(x)$  pour  $x > 0$ . En déduire la limite de  $f$  à droite en 0.
4. Par une méthode analogue, étudier la limite de  $f$  à gauche en 0.