TD AN3 - Corrigé des exercices

Exercice 1

1) Soit $h = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$$\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2 - 1} = \frac{\ln(1+h)}{h^2 + 2h} = \frac{\ln(1+h)}{h} \times \frac{1}{h+2}$$

or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ par taux d'accroissement usuel

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h+2} = \frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

$8 \times 3\, h \times \frac{\pi}{4}^2$

2) Soit $h = x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x \to \pi/2]{} 0$.

$$\frac{8x^3 - \pi^3}{\cos(x)} = \frac{8(h + \pi/2)^3 - \pi^3}{\cos(h + \pi/2)} = \frac{8h^3 + 12\pi h^2 + 6\pi h}{-\sin(h)}$$

$$= \frac{8h^2 + 12\pi h + 6\pi}{-\frac{\sin(h)}{h}}$$

or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ par taux d'accroissement usuel

Donc $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{8x^3 - \pi^3}{\cos(x)} = -6\pi$

Exercice 2

1) <u>si $x > 1$</u>, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$

donc $f(x) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) <u>si $x < -1$</u>, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ donc $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = -1$

donc $f(x) = -x$. Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3) <u>soit $x > 0$</u>

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

donc $1 - x < f(x) \leq 1$ car $x > 0$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} (1-x) = 1$ donc par encadrement $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

4) <u>si $x < 0$</u>, $1 - x > f(x) \geq 1$ donc de même

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.