TD AN3 : Corrigé des ADC

Adc 1

F.I ici $(-\infty+\infty)$. Terme prépondérant : x^5.

1) • Soit $x<0$. $\quad x^5+5x^2-e^x = x^5\left(1+\dfrac{5}{x^3}\right)-e^x$

Or $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $x^5 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, $1+\dfrac{5}{x^3} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$

Donc $\quad x^5+5x^2-e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

FI : "$+\infty-\infty$", terme prépondérant : e^x

• Soit $x>0$. $\quad x^5+5x^2-e^x = e^x\left(\dfrac{x^5}{e^x}+5\dfrac{x^2}{e^x}-1\right)$

Or $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\quad \dfrac{x^5}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{x^2}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par

croissances comparées. Donc

$$x^5+5x^2-e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1+x}{1-x^2} + \dfrac{2}{1-x^2}$ $\quad$ car $1-x^2=(1-x)(1+x)$

$$= \frac{3+x}{1-x^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x\to1^+}(1-x^2)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to1}(3+x)=4$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to1}(3+x)=4$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(1-x^2)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1}(3+x)=2$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(1-x^2)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1}(3+x)=2$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$

3) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$

- <u>En $+\infty$</u> : Soit $x > 0$. $|x| = x$

donc $g(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x + 2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

- <u>En $-\infty$</u> : Soit $x < 0$, $|x| = -x$

donc $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x} = x - 2 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

- <u>En 0^+</u> : si $x > 0$, $g(x) = x+2 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} 2$

- <u>En 0^-</u> : si $x < 0$, $g(x) = x-2 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x<0}]{} -2$

g n'a pas de limite globale en 0.

ADC 2

1) $$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{1+1} = 1$$

2) $$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{(x+5)-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

3) <u>Méthode 1</u> : Posons $h = x-4 \xrightarrow[x\to 4]{} 0$

$$\frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \frac{(4+h)^2-16}{(4+h)^2-5(4+h)+4} = \frac{8h+h^2}{3h+h^2} = \frac{8+h}{3+h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{8}{3}$$

<u>Méthode 2</u>

- $x^2-16 = (x-4)(x+4)$
- x^2-5x+4 : $\Delta = 25-4\times 4 = 9$

Racines : $\frac{5-3}{\alpha} = 1$ et $\frac{5+3}{2} = 4$

Donc $x^2-5x+4 = 1(x-1)(x-4)$

coef a

Ainsi $$\frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x+4}{x-1} \xrightarrow[x\to 4]{} \frac{8}{3}.$$

<u>ADC3</u>

1) $f(x) = \ln(x)\times\ln(\ln(x))$ en 1^+

Soit $X = \ln(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0^+$. Puisque $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$

par croissance comparée alors $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ (composée)

2) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$. Soit $h = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$f(x) = \frac{e^h-1}{x} = \frac{e^h-1}{x\times x}\times x = \frac{e^h-1}{h}\times x$$

Or $\frac{e^h-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ par taux d'accroissement usuel

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1\times 0 = 1$

⚠ On évite d'écrire $x = \sqrt{h}$ car on ne sait pas si $x \geq 0$

Sinon, il faut séparer 0^+ (où $x = \sqrt{h}$) et 0^- (où $x = -\sqrt{h}$)

3) $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}} = \dfrac{\ln(x^{1/2})}{x^{1/3}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\ln(x)}{x^{1/3}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$

par croissance comparée.

4) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ par taux d'accroissement usuel.

Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
f n'a pas de limite en 0.

5) $f(x) = \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\right)$

Or pose $h = -\dfrac{2}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$x \ln\left(1 - \dfrac{2}{x}\right) = -\dfrac{2}{h} \ln(1+h) = -2 \times \dfrac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -2 \times 1 = -2$
par taux d'accroissement usuel.

Par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \exp(-2)$

6) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$. Or $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ par taux d'accroissement usuel

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

7) $f(x) = \dfrac{e^x - e^3}{x - 3}$

Posons $h = x - 3 \xrightarrow[x \to 3]{} 0$.
$f(x) = \dfrac{e^{3+h} - e^3}{h} = e^3 \times \dfrac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} e^3 \times 1 = e^3$
par taux d'accroissement usuel.

ADC 4

$*$ f est définie en 0 et $f(0) = 0^2 = 0$.

Si $x < 0$

$$f(x) = x^2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

Si $x > 0$

$$f(x) = e^{-1/x}. \quad \text{Or} \quad \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

Conclusion : f admet une limite en 0 et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

$*$ g est définie en 0 et $g(0) = -1$

$$|x(x-1)| = \begin{cases} x(x-1) & \text{si } x(x-1) \geq 0 \\ -x(x-1) & \text{si } x(x-1) < 0 \end{cases}.$$

Or

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x(x-1) = x^2 - x$.

Sur $]0,1[$, $g(x) = \dfrac{-x(x-1)}{x} = -x+1$

donc $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \neq g(0)$

Donc g n'admet pas de limite en 0.

Rq : $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1 = g(0)$ cependant.

$*$ h n'est pas définie en 0.

Si $x > 0$

$h(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$. Or $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1$ donc $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$

Si $x<0$

$$h(x) = \frac{xe^x}{1-e^x} = e^x \times \frac{1}{\frac{1-e^x}{x}} = -e^x \times \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ par taux d'accroissement usuel.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

h n'a pas de limite en 0.

ADCJ

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

* Si $x>0$ $\quad 0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

donc $\quad 0 \leq x\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \quad$ car $x>0$

Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{x\to 0^+} x\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

* Si $x<0$, on a $\quad 0 \geq x\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \quad$ et donc

de même, $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} x\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} x\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2) Soit $x \in [0,+\infty[$:

$$\sin(x) \geq -1$$

donc $\quad 2+\sin(x) \geq 1$

donc $\quad x(2+\sin(x)) \geq x \quad$ car $x \geq 0$

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ donc par minoration $\lim\limits_{x\to +\infty} x(2+\sin(x)) = +\infty$