AN3

LIMITES DE FONCTIONS

Table des matières

Avant toute chose, il faut connaître les limites usuelles (voir chapitre AN1).

Proposition .1 : Croissances comparées

Pour tous $a, b > 0$ (constantes)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^b\, e^{ax} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\ln(x)^a} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} x^b \ln(x)^a = 0.$$

Proposition .2 : Taux d'accroissement usuels

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Dans tout le chapitre, a désignera un réel de I ou une extrémité (réelle ou infinie) de I.
Nous allons définir la notion de limite de f en a.

I Limites (éventuelle) d'une fonction

I.1 Limite finie ou infinie

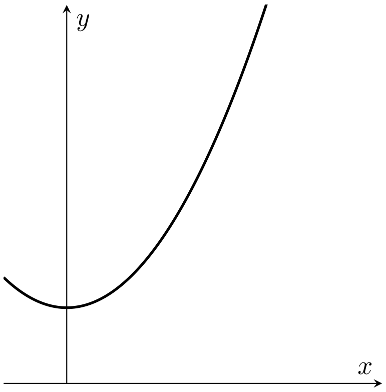
Définition I.1 : Limite finie

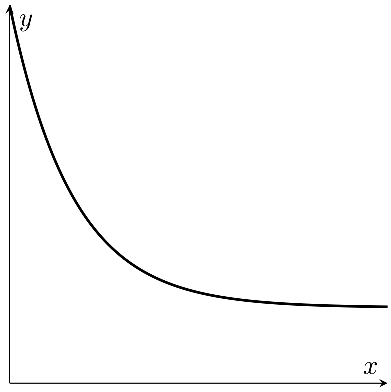
Soit ℓ un réel. On dit que la fonction f tend vers ℓ en a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, lorsque

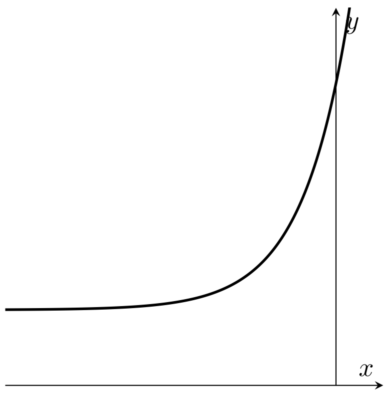
Cas a **réel :** $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$

Cas $a = +\infty$ **:** $\forall\varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$

Cas $a = -\infty$ **:** $\forall\varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$







Remarque. Notion de **voisinage** de a.

1. Un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a - \delta, a + \delta]$ avec $\delta > 0$.

$$x \in [a - \delta, a + \delta] \iff a - \delta \leqslant x \leqslant a + \delta \iff |x - a| \leqslant \delta.$$

2. Un voisinage de $a = +\infty$ est un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

3. Un voisinage de $a = -\infty$ est un intervalle de la forme $]-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

La définition précédente peut donc se résumer en :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un voisinage de } a \text{ sur lequel } |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.}$$

Remarque. $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$

Remarque. On a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(x)-\ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \iff |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

et, en posant $h = x-a$,

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \ell.$$

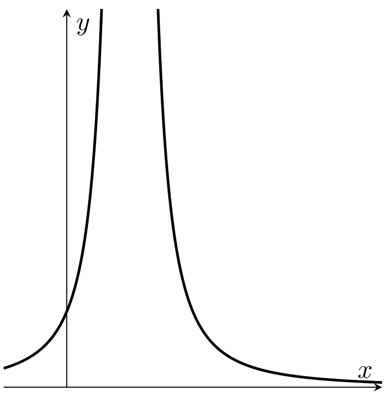
Définition I.2 : Limite valant $+\infty$

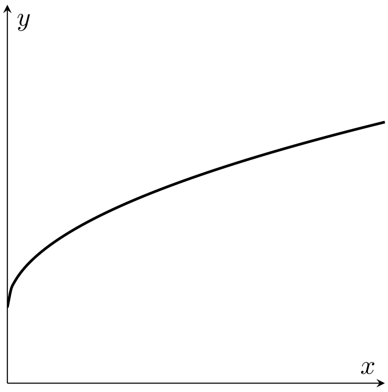
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, lorsque

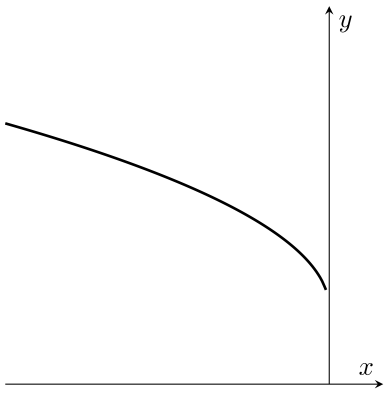
Cas a réel : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M.$

Cas $a = +\infty$: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M.$

Cas $a = -\infty$: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M.$







Remarque. La définition précédente peut se résume en :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \text{pour tout } M \in \mathbb{R}, \text{ il existe un voisinage de } a \text{ sur lequel } f(x) \geqslant M.}$$

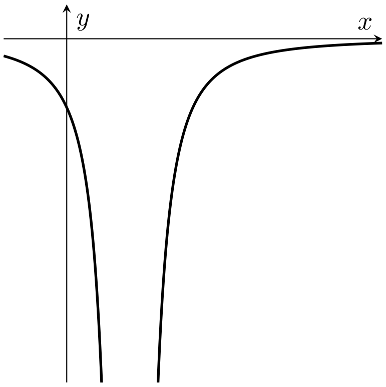
Définition I.3 : Limite valant $-\infty$

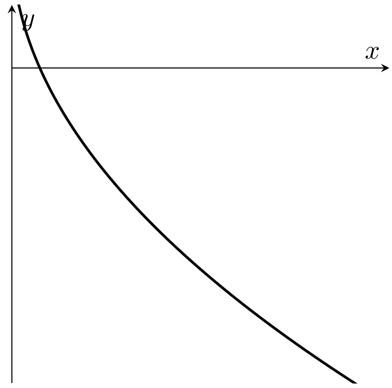
On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, lorsque

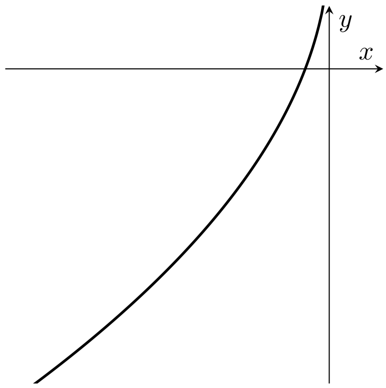
Cas a réel : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \leqslant M$.

Cas $a = +\infty$: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \geqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$.

Cas $a = -\infty$: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \leqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$.







Remarque. La définition précédente peut se résume en :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \text{pour tout } M \in \mathbb{R}, \text{ il existe un voisinage de } a \text{ sur lequel } f(x) \leqslant M.}$$

I.2 Premières propriétés

Proposition I.4

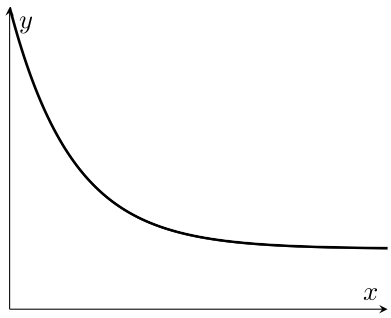
Si f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a, alors f est bornée au voisinage de a.
Si f a pour limite $+\infty$ en a, alors f est minorée mais non majorée au voisinage de a.
Si f a pour limite $-\infty$ en a, alors f est majorée mais non minorée au voisinage de a.

Remarque. Attention, ces propriétés ne sont valables que sur un voisinage de a. Elles ne sont pas forcément vraies sur tout l'ensemble de définition de f.
Exemple :

Proposition I.5 : Cas particulier

Si f admet en a une limite strictement positive (réelle ou $+\infty$), alors f est strictement positive au voisinage de a.

Démonstration.
Cas $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose donc que $\ell > 0$ et que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.



□

Soit $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Il existe un voisinage de a sur lequel $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ceci signifie que $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Or, $\ell - \varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Donc $f(x) > 0$ sur un voisinage de a.
Cas $\ell = +\infty$. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $M = 1$. Il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) \geqslant M > 0$.

Théorème I.6 : Unicité de la limite

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit a un réel de I ou une borne de I.
Si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique. On la note $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Remarque. On dit que f **admet une limite en** a si elle tend vers un réel, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a. Une fonction peut ne pas admettre de limite en a.

I.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition I.7

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soit a un réel de I ou une borne réelle de I. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1. Supposons que $a \in \mathbb{R}$ ne soit pas la borne inférieure de I. On dit que f **admet une limite à gauche en** a lorsque la fonction

$$\begin{array}{rcl} \{x \in I,\ x < a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

admet une limite en a. On note cette limite $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

2. Supposons que $a \in \mathbb{R}$ ne soit pas la borne supérieure de I. On dit que f **admet une limite à droite en** a lorsque la fonction

$$\begin{array}{rcl} \{x \in I,\ x > a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

admet une limite en a. On note cette limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

Exemple.

Proposition I.8

Si $f : I \to \mathbb{R}$ **est définie en le réel** a et que a n'est pas une borne de I.

1. f admet une limite en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

2. Si f admet une limite en a, alors on a forcément $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction f suivante admet-elle une limite en 1 ?

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \end{array}$$

Exemple. La fonction g suivante admet-elle une limite en 0 ?

$$\begin{array}{rccl} g\colon &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x)+1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Remarque. On ne parlera de limites à gauche et à droite que lorsque c'est pertinent !

Exemple. La fonction h suivante admet-elle une limite en 0 ?

$$h\colon \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Définition I.9 : Cas des fonctions non définies en a

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ avec a un réel de I. Ici, f **n'est pas définie en** a.
On dit que f admet une limite en a lorsque

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Dans ce cas, la valeur de cette limite commune est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ s'il n'y a pas d'ambigüité.

Remarque. Encore une fois, si le calcul à gauche et à droite est exactement le même, on pourra directement utiliser la notation $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

ou simplement

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

car ici il est clair que $x \neq 0$.

Exemple. Étudier la limite en 1 de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x-1)^3} \end{array}$.

Exemple. Étudier la limite en 0 de la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2+\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$.

I.4 Opérations sur les limites

Comme pour les suites, on pourra calculer des limites par opérations à partir de limites usuelles. Les opérations ont été rappelées dans le chapitre AN1.

Exemple. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en $+\infty$.

On pourra également se référer au chapitre AN2 sur les suites. Nous y avons notamment énoncé le théorème suivant :

Théorème I.10 : Composition séquentielle

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Si $f \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Exemple. Utilisons ce théorème pour démontrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Théorème I.11 : Passage à la limite dans une inégalité

Si f et g admettent des limites réelles ℓ et ℓ' en a et si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \ell'$.

II Théorèmes d'existence de limites

II.1 Par encadrement, majoration ou minoration

Théorème II.1 : d'existence de limite finie par encadrement

Soient f, g et h trois fonctions définies sur I à valeurs réelles telles que :

1. $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de a ;
2. g et h tendent vers un même réel ℓ en a.

Alors f tend vers ℓ en a.

Corollaire II.2 : Cas particulier $\ell = 0$

Si $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)$ au voisinage de a et que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. En effet, on a : $-\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon(x)$ puis on applique le théorème d'encadrement. □

Exemple. $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.

Théorème II.3 : d'existence de limite valant $+\infty$ par minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles telles.
Si

1. $f(x) \geqslant g(x)$ au voisinage de a
2. $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$,

alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème II.4 : d'existence de limite valant $-\infty$ par majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles telles.
Si

1. $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a
2. $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$,

alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple. Déterminer, si elles existent, les limites de la fonction partie entière en $+\infty$ et en $-\infty$.

II.2 Fonctions monotones

Théorème II.5 : de la limite monotone

Soit f une fonction sur l'intervalle **ouvert** $]a, b[$ (avec $a < b$, éventuellement infinis).
Si f est monotone sur $]a, b[$, f admet des limites en a et en b.
Plus précisément :

1. Si f est croissante ...
   (a) ... et majorée, elle admet une limite finie en b ;
   (b) ... et non majorée, elle admet $+\infty$ pour limite en b.
   (c) ... minorée, elle admet une limite finie en a ;
   (d) ... non minorée, elle admet $-\infty$ pour limite en a.
2. Si f est décroissante ...
   (a) ... et minorée, elle admet une limite finie en b ;
   (b) ... et non minorée, elle admet $-\infty$ pour limite en b ;
   (c) ... et majorée, elle admet une limite finie en a ;
   (d) ... et non majorée, elle admet $+\infty$ pour limite en a.