AN1 - Partie 2

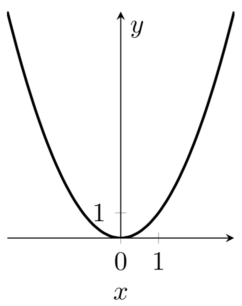
FONCTIONS USUELLES

Table des matières

I Fonctions puissances et polynomiales

Fonctions puissances $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

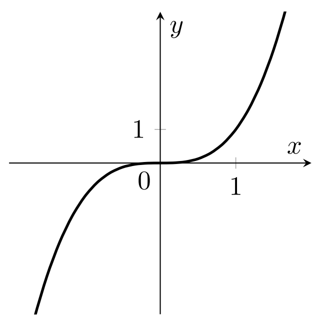
Cas où n est pair



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

La fonction $x \mapsto x^n$ est paire
Tangente horizontale en (0,0)

Cas où n est impair



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$	$-\infty$ ↗		$+\infty$

La fonction $x \mapsto x^n$ est impaire
Tangente horizontale en (0,0)

Fonctions polynomiales

Définition I.1

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction de la forme

$$x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes réelles. C'est une *combinaison linéaire* de fonctions puissances.

Exemple. *La fonction $x \mapsto 5x^3 - x + 7$ est une fonction polynomiale.*

Proposition I.2

Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Cas particulier à connaître parfaitement : fonctions affines (et linéaires)

Soit $f : x \mapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Le tableau de variation de f est :

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$
signe	$+$	0	$-$

Cas particulier à connaître parfaitement : fonctions polynomiales du second degré

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Le tableau de variation de f est :

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$

Remarque. *Le coefficient noté ici a est appelé le* coefficient dominant *de f.*

Exemple. *Soit $f : x \mapsto 3 - x - 2x^2$.*

1. *Quel est son ensemble de définition ?*

   f est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. *Dresser son tableau de variation et son tableau de signe.*

- coefficient dominant : $a = -2 < 0$
- sommet en $-\frac{-1}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{4}$
- $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$
- racines :

  $x_1 = \frac{1-5}{-4} = 1$, $x_2 = \frac{1+5}{-4} = -\frac{3}{2}$

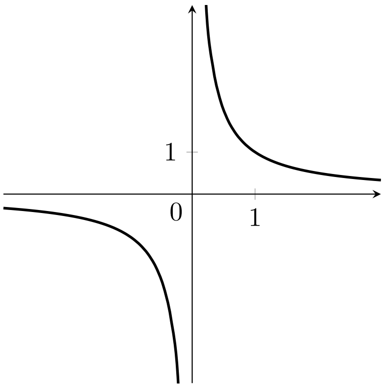
x	$-\infty$	$-3/2$	$-1/4$	1	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$ 0	$\searrow$ $-\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

II Fonction inverse - Fonctions rationnelles

Fonction inverse

Définition II.1

La fonction **inverse** est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 0$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire.

Asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
Asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Fonctions rationnelles

Définition II.2

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction définie comme quotient de deux fonctions polynomiales.

Exemple. *La fonction* $x \mapsto \dfrac{5x+1}{x^2}$ *est une fonction rationnelle, quotient de* $x \mapsto 5x+1$ *par* $x \mapsto x^2$.

Proposition II.3

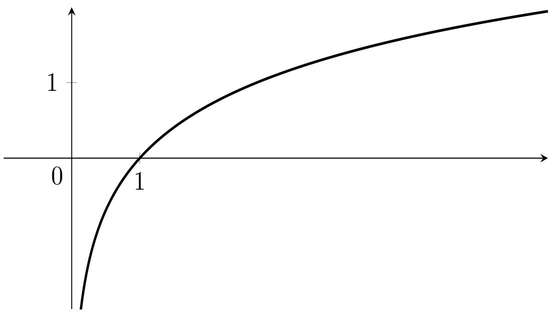
Une fonction rationnelle est continue et dérivable sur son ensemble de définition.

III Fonction logarithme népérien

Définition III.1

On appelle **logarithme népérien**, et on note ln, l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.
C'est donc la fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
ln	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	



Proposition III.2 : Limites remarquables

Limites aux bornes : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Croissances comparées : $\displaystyle\forall \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta \big(\ln(x)\big)^\alpha = 0$

Taux d'accroissement usuel : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = 1$

Proposition III.3 : Propriétés algébriques

Pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$, on a :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
- $\forall a, b \in]0,+\infty[,\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Exemples de croissance comparée

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\quad (\alpha = \beta = 1)$

  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^{10}}{x^2} = 0$ $\quad (\alpha = 10,\ \beta = 2)$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ $\quad (\alpha = \beta = 1)$

  $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/4} \ln(x)^3 = 0$ $\quad (\alpha = 3,\ \beta = \tfrac{1}{4})$

IV Fonction exponentielle

La fonction ln est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection, pour tout $k \in]-\infty,+\infty[$, l'équation $\ln(x) = k$ admet une unique solution $x \in]0,+\infty[$.

Définition IV.1

On appelle **fonction exponentielle**, et on note

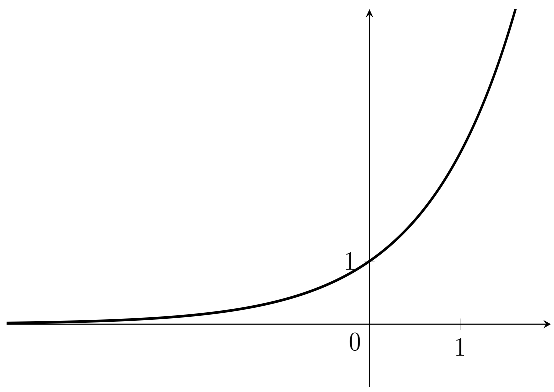
$$\begin{array}{rccl} \exp\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

où $y = \exp(x)$ est l'unique réel strictement positif tel que $\ln(y) = x$.

Proposition IV.2

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]0,+\infty[$, $\exp(x) = y \iff x = \ln(y)$.
3. $\forall y > 0$, $\exp(\ln(y)) = y$; $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$
4. $\exp(0) = 1$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$



Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Proposition IV.3 : Limites remarquables

Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

Croissances comparées : $\forall \alpha, \beta > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\alpha x)}{x^\beta} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^\beta \exp(\alpha x) = 0$

Taux d'accroissement usuel : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\exp(h) - 1}{h} = \exp'(0) = 1$

Exemples de croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad (\alpha = \beta = 1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^5} = +\infty$ $\quad (\alpha = 2, \beta = 5)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$ $\quad (\alpha = \beta = 1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 e^{\frac{1}{2}x} = 0$ $\quad (\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 5)$

Proposition IV.4 : Propriétés algébriques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exp(ax) = (\exp(x))^a$.

Remarque.
Ces propriétés justifient la notation puissance : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$*, avec* $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,72$.
Avec cette notation, ce qui précède s'écrit plus naturellement :

- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{ax} = \left(\mathrm{e}^x\right)^a$.
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Puissances réelles

Plusieurs propriétés citées précédemment utilisent des puissances réelles, pas forcément entières (par exemple dans $\left(\mathrm{e}^x\right)^a$ avec $a \in \mathbb{R}$). Il est temps de préciser ce que signifie cette notation.

Définition IV.5

Par définition, pour tous réels a et b avec $a > 0$,

$$\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}.}$$

Exemple. $5^\pi = \left(\mathrm{e}^{\ln(5)}\right)^\pi = \mathrm{e}^{\pi\ln(5)}$ $\qquad (1+x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$

V Fonctions racine carrée

La fonction carrée est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'équation $y^2 = x$ admet une unique solution $y \in \mathbb{R}_+$.

Définition V.1

La fonction racine carrée est la fonction

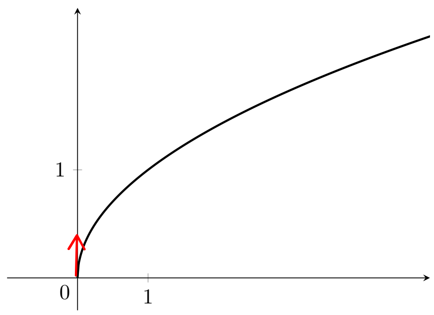
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

où, pour $x \geqslant 0$, $y = \sqrt{x}$ est l'unique réel positif tel que $y^2 = x$.

Proposition V.2

1. $\forall x, y \geqslant 0, \quad \sqrt{x} = \sqrt{y} \Longleftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \geqslant 0, \quad y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$
3. $\forall x \geqslant 0,\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 = x \Longleftrightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (\sqrt{x})^2 = x$, $\quad \forall y \in \mathbb{R},\ \sqrt{y^2} = |y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geqslant 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$. $\quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{x} = x^{1/2}$

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0 $\nearrow$	$+\infty$



tangente verticale en 0

$x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

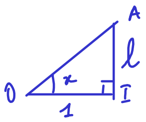
Remarque. *Racine cubique :* $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ *pour* $x > 0$.

Racine n-ième : $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

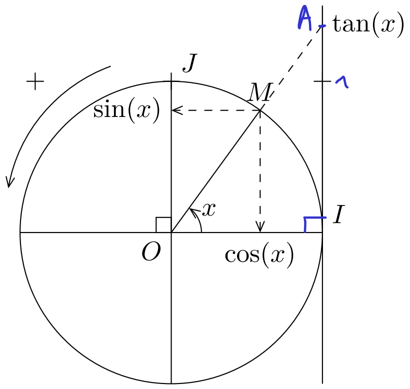
⚠ $\sqrt[3]{x} \neq (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$

VI Fonctions circulaires

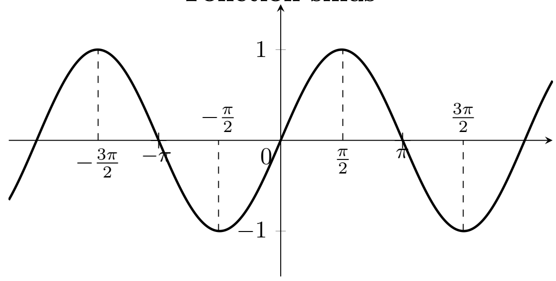
triangle OIA



$\tan(x) = \frac{l}{1} = l$

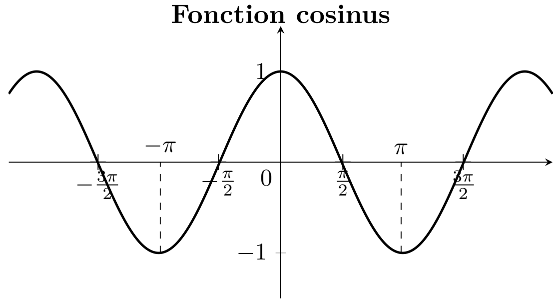


Fonction sinus



La fonction sinus est impaire et 2π-périodique.

Fonction cosinus



La fonction cosinus est paire et 2π-périodique.

Définition VI.1 : Fonction tangente

La **fonction tangente** est la fonction

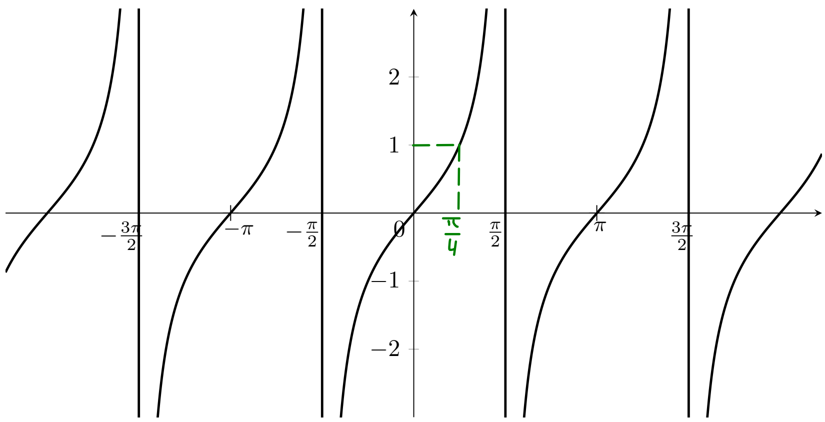
$$\tan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

$\cos(x) = 0$

$\iff$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$



Proposition VI.2

- La fonction tangente est impaire et π-périodique.
- $\tan(0) = 0$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
- La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - (-\sin(x)) \times \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Symétries des fonctions circulaires

À savoir retrouver rapidement grâce au cercle trigonométrique

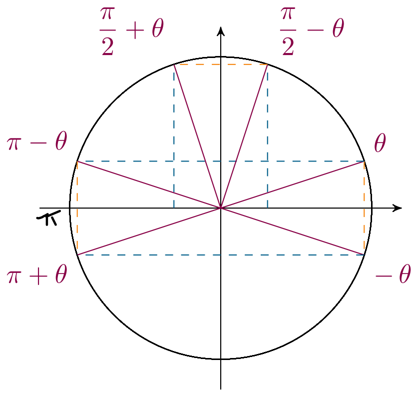
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$ $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta)$

$\sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi+\theta) = \tan(\theta)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos(\theta)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin(\theta)$



Formules de trigonométrie

$$\cos^2(a)+\sin^2(a) = 1$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$b \leftarrow -b$

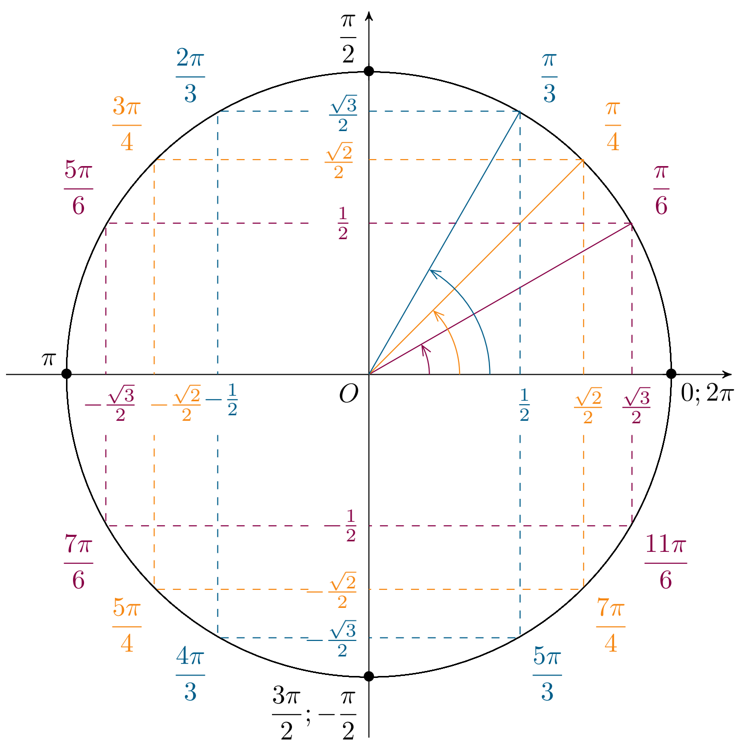
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$a = b$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 2\cos^2(a)-1 = 1-2\sin^2(a)$$



VII Fonction valeur absolue

Définition VII.1

La fonction **valeur absolue** est la fonction :

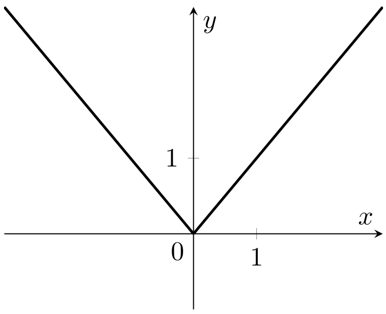
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Exemple. $|-3.2| = 3.2, \quad |0| = 0, \quad |157.41| = 157.41.$

Proposition VII.2

1. La fonction valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$.
2. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Elle n'est pas dérivable en 0.
3. La fonction valeur absolue est paire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \|x\|$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



non dérivable en 0.

Proposition VII.3 : Règles de calcul

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$ et $|x|^2 = x^2$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x|\,|y|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$. Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant x$.

Exemple. *Donner l'expression de $f : x \mapsto |3 - x - 2x^2|$ sans utiliser les valeurs absolues.*

$$|X| = \begin{cases} X & \text{si } X \geqslant 0 \\ -X & \text{si } X < 0 \end{cases} . \quad \text{Ici } X = 3 - x - 2x^2 .$$

On cherche donc le signe de X.

$\Delta = 1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$.

$x_1 = \dfrac{1-5}{-4} = 1$, $x_2 = \dfrac{1+5}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$3-x-2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a<0$

↗ ↘

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x - 2x^2 & \text{si } x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right] \\ -3 + x + 2x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

VIII Fonction partie entière

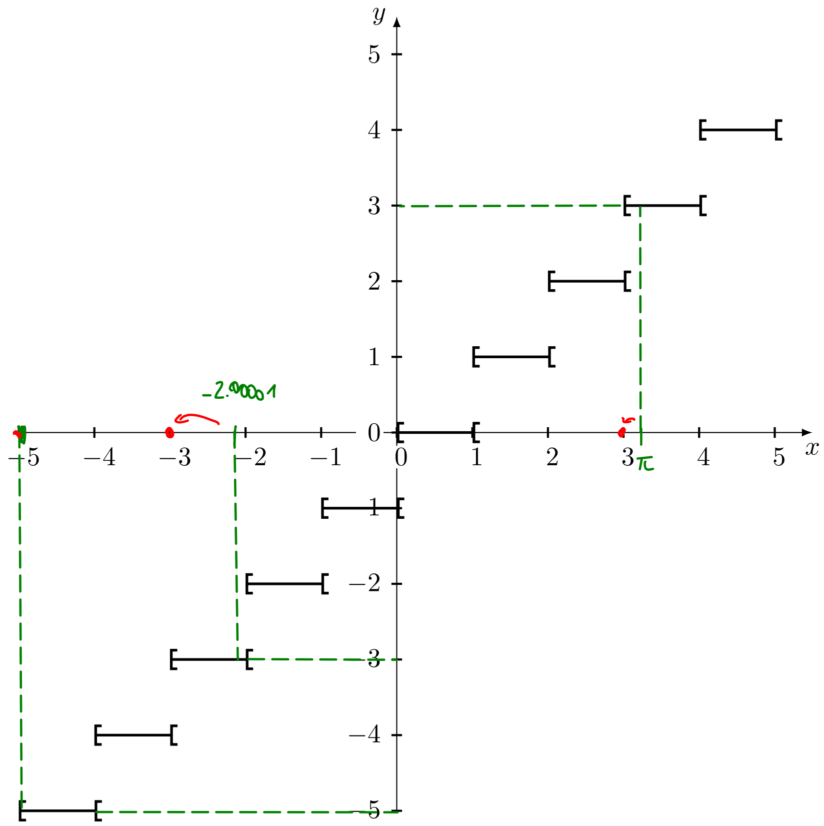
Définition VIII.1

La fonction **partie entière** est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

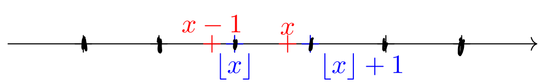
Exemple. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.00001 \rfloor = -3$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$.



Proposition VIII.2 : Caractérisation par un encadrement

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étant donné un **entier relatif** n, on a :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff n \leqslant x < n+1 \iff x-1 < n \leqslant x$$



Remarque.
- *La fonction partie entière est une fonction en escalier. Elle présente une discontinuité en tout $n \in \mathbb{Z}$.*
- *La fonction partie entière est croissante, mais n'est pas strictement croissante. En effet, elle est constante sur tout intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.*

IX Dérivées usuelles

Fonction f	**Fonction f'**	**Ensemble de dérivabilité**
$f(x) = k$, k constante	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^a$, a <u>constante</u>	$f'(x) = ax^{a-1}$	dépend de a
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$f'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, a <u>constante</u>	$f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

$a \in \mathbb{N} \rightarrow$ sur $\mathbb{R}$
sinon $\rightarrow$ sur $]0,+\infty[$

Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par un réel	pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $(ku)' = ku'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composée	$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$
<u>Cas particuliers</u>	$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$; $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$ $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$