AN1 - Partie 1

ÉLÉMENTS D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

Table des matières

Programme de ECS

1 - Vocabulaire sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	
Majorant, minorant, maximum, minimum.	
Partie entière d'un réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

Fonctions paires, impaires, périodiques.	
Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.	
Composée de deux fonctions	
Théorème des valeurs intermédiaires.	
Théorème de la bijection.	On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$.

I Vocabulaire lié aux fonctions

On appelle **fonction réelle d'une variable réelle** la donnée d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ et d'une correspondance qui à tout élément de D associe un unique élément de $\mathbb{R}$.
On la note $f\colon \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. L'ensemble D s'appelle l'ensemble de départ et ici $\mathbb{R}$ est l'ensemble d'arrivée (il peut éventuellement être changé si cela est pertinent).

Définition I.1

Deux fonctions $f\colon D \to \mathbb{R}$ et $g\colon D \to \mathbb{R}$ sont dites **égales** si

$$\forall x \in D, \quad f(x) = g(x)$$

Définition I.2

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a \in D$ et $b \in \mathbb{R}$.

- L'**image** de a est le réel $f(a)$. Il est unique.
- Un **antécédent** de b est un réel $x \in D$ tel que $f(x) = b$. Le nombre d'antécédent d'un réel b est variable (de 0 à une infinité selon les cas).

À partir des fonctions usuelles (listées dans la partie 2 de ce chapitre), nous pouvons créer d'autres fonctions à l'aide des opérations suivantes.

Définition I.3 : Opérations

Soient f et g deux fonctions.

Somme de f et g : $x \mapsto f(x) + g(x)$.

Multiplication de f par un réel : Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda \times f(x)$.

Produit de f et g : $x \mapsto f(x) \times g(x)$.

Puissance n-ième de f : Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \big(f(x)\big)^n$.

Inverse de f : $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$

Quotient de f par g : $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Composée de f par g : $g \circ f\colon x \mapsto g\big(f(x)\big)$ (le nom de la fonction se lit « g rond f ».)

Exemple. *Donner l'expression de $g \circ f$ avec $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ et $g\colon x \mapsto 5x^2 + 4x$*

Exemple. *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ peut être vue comme :*

- *une puissance de $x \mapsto$*
- *l'inverse de $x \mapsto$*
- *la composée $g \circ f$ de $f\colon x \mapsto$ par $g\colon x \mapsto$*

Définition I.4

La **courbe** de $f\colon D \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour $x \in D$.

II Plan d'étude d'une fonction

II.1 Ensemble de définition

Définition II.1

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \ f(x) \text{ existe } \}$$

C'est le plus grand ensemble de départ que l'on peut donner à f.

Remarque. *Par défaut, une fonction aura pour ensemble de départ son ensemble de définition.*

Proposition II.2

Soient f et g deux fonctions. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition et f et $\mathcal{D}_g$ l'ensemble de définition de g.

Multiplication par un réel, puissance : $x \mapsto \lambda f(x)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $x \mapsto (f(x))^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, ont le même ensemble de définition que f.

Somme, produit : L'ensemble de définition de $x \mapsto f(x) + g(x)$ et de $x \mapsto f(x)g(x)$ est

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ et } g(x) \text{ existent}\} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

Inverse : L'ensemble de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \neq 0\}$$

Quotient : L'ensemble de définition de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est

$$\{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\}$$

Composée : L'ensemble de définition de $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe et } g(f(x)) \text{ existe}\} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$$

Remarque. *Il faut avant toute chose connaître les ensemble de définition des fonctions usuelles.*

Fonction	**Ensemble de définition**
Polynomiale	$\mathbb{R}$
Inverse	$\mathbb{R}^*$
exp	$\mathbb{R}$
ln	$]0, +\infty[$
Racine carrée	$[0, +\infty[$
Racine cubique	$\mathbb{R}$
cos, sin	$\mathbb{R}$
$\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$	*valeur interdite en chaque* $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Valeur absolue	$\mathbb{R}$
Partie entière	$\mathbb{R}$

Exemple. *Ensemble de définition de* $f\colon x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Exemple. *Ensemble de définition de* $g\colon x \mapsto (2+x)^x$.

II.2 Parité - Périodicité

Définition II.3 : Fonction paire

Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est dite **paire** si :

1. $\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ (l'ensemble $\mathcal{D}_f$ est centré en 0) ;
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.

Exemple.
- *Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ un entier pair sont paires.*
- *La fonction* cos *est paire.*
- *Démontrer que $f : x \mapsto \cos(2x)$ est paire.*

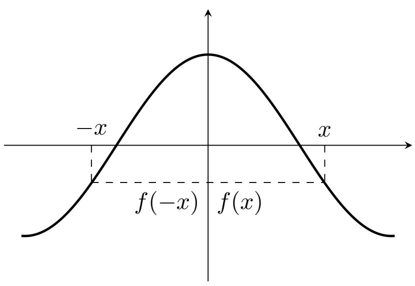
Définition II.4 : Fonction impaire

Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est dite **impaire** si :

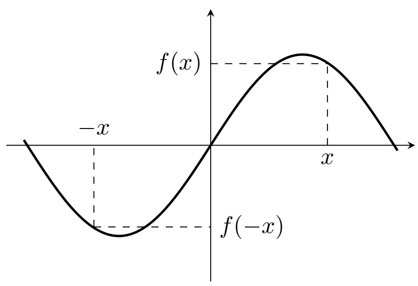
1. $\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$;
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemple. sin, tan, *les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n impair sont impaires.*

Remarque. *La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.*



Fonction paire



Fonction impaire

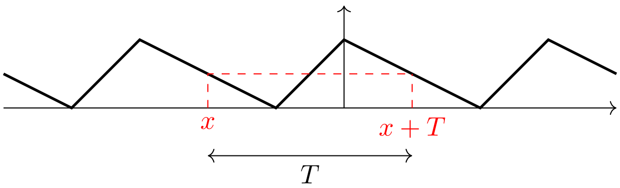
Remarque. *Attention, paire et impaire ne sont pas contraires : la fonction nulle est à la fois paire et impaire et certaines fonctions ne sont ni paires, ni impaires.*

Exemple. *Montrer que* $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ *est impaire.*

Définition II.5 : Fonction périodique

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D. Soit $T > 0$ un réel.
On dit que f est **périodique** de période T (ou T-périodique) lorsque

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$



Exemple. 1. *Les fonctions sinus et cosinus sont* 2π*-périodiques.*

2. $\tan$ *est* π*-périodique :*

3. *Déterminer une période de la fonction* $f : x \mapsto \cos(3x)$ *:*

Réduction du domaine d'étude.
L'étude de la parité et de la périodicité permet de réduire le domaine d'étude (pour les variations par exemple), le reste se déduisant par symétrie.
Par exemple, $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc on peut l'étudier entre $-\pi$ et π (sur un motif). Sur $[-\pi, \pi]$ (centré en 0), cos est toujours paire. On peut donc l'étudier uniquement sur $[0, \pi]$.

II.3 Calcul des limites - Asymptotes

Il faut connaître les limites des fonctions usuelles, les croissances comparées et les taux d'accroissement usuels (voir partie 2).

Proposition II.6 : Taux d'accroissement

Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$.

$\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$\ell' = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell = 0$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell\ell'$			$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$				$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = 0$				**FI**	**FI**
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell = 0$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$			$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$				$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = 0^+$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = \pm\infty$	0	0	0	**FI**	**FI**

Proposition II.7 : Limite d'une composée

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

!! **Attention !!** Pour les fonctions du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ (puissance non constante), on passera sous **forme exponentielle**.

Proposition II.8 : Utilisation de la parité

Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. On cherche $\lim\limits_{x\to -a} f(x)$.

1. Si f est paire, alors $\lim\limits_{x\to -a} f(x) = \ell$.
2. Si f est impaire, alors $\lim\limits_{x\to -a} f(x) = -\ell$.

Exemple. *Limites aux bornes de l'ensemble de définition de* $f\colon x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Exemple. *Limites aux bornes de l'ensemble de définition de* $g\colon x \mapsto (2+x)^x$.

Asymptotes

Définition II.9

1. Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors la représentation graphique de f présente une **asymptote horizontale**, d'équation $y = \ell$.
2. Si f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en un point $a \in \mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f admet une **asymptote verticale**, d'équation $x = a$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour **asymptote (oblique)** la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$. Analogue en $-\infty$.

Remarque. *Si f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ avec $a \neq 0$ (ie non horizontale) en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$. Les asymptotes oblique n'arrive donc que dans ce cas.*
Attention cependant à ne pas trop généraliser : une courbe n'a pas toujours de droite asymptote. Par exemple, la fonction carrée n'a pas de droite asymptote en $+\infty$ (même si sa limite est $+\infty$).

Exemple. *Asymptotes de la courbe de la fonction $f\colon x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. :*

Exemple. *Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe de $h : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.*

II.4 Justifier la continuité/dérivabilité des fonctions simples

Il faut avant toute chose connaître les ensembles de référence. Les fonctions usuelles sont en général continues et dérivables sur leur ensemble de définition.

Cas problématiques

Fonction	Ensemble de continuité	Ensemble de dérivabilité
Racine carrée	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$ (attention)
Valeur absolue	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$ (attention)

La méthode est ensuite similaire aux ensembles de définition : on raisonnera par opérations sur les fonctions usuelles

Proposition II.10

Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Remarque. *Si on a besoin de montrer continuité et dérivabilité, il suffit de faire dérivabilité.*

Attention, la réciproque est fausse : la valeur absolue est continue en 0 *mais pas dérivable en* 0.

Exemple. *Justifier que* $u\colon x \mapsto \sqrt{x-5}$ *est continue sur* $[5, +\infty[$ *et dérivable sur* $]5, +\infty[$ *puis calculer sa dérivée.*

Exemple. *Justifier que* $v\colon x \mapsto \cos(x^2)$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *puis calculer sa dérivée.*

II.5 Étude des variations

!! Attention !! L'étude des variations sera systématiquement faite sur des **intervalles.**
Par exemple, $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. Si f est définie sur $\mathbb{R}^*$, les variations seront données sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ séparemment.

Définition II.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :

- **croissante** sur I lorsque $\forall x, y \in I$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- **strictement croissante** sur I lorsque $\forall x, y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- **décroissante** sur I lorsque $\forall x, y \in I$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- **strictement décroissante** sur I lorsque $\forall x, y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- **monotone** sur I lorsque f est croissante sur I ou décroissante sur I.
- **strictement monotone** sur I lorsque f est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Proposition II.12 : Variations et inégalités

1. Si f est **strictement** croissante sur I, alors on a :
$$\forall x, y \in I, \quad x < y \iff f(x) < f(y)$$
et
$$\forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y).$$
2. Si f est **strictement** décroissante sur I, alors on a :
$$\forall x, y \in I, \quad x < y \iff f(x) > f(y)$$
et
$$\forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y).$$

Théorème II.13 : Variations et signe de la dérivée

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. (a) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
   (b) Si $\begin{cases} \forall x \in I, \ f'(x) \geqslant 0 \\ \text{l'équation } f'(x) = 0 \text{ a un nombre fini de solutions} \end{cases}$ alors f est *strictement* croissante sur I.
2. (a) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
   (b) Si $\begin{cases} \forall x \in I, \ f'(x) \leqslant 0 \\ \text{l'équation } f'(x) = 0 \text{ a un nombre fini de solutions} \end{cases}$ alors f est *strictement* décroissante sur I.

Remarque. *Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f vérifie le point 1.b) de ce théorème ($f'(x) = 0$ ayant 0 solution), donc f est strictement croissante sur I.*
De même, si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple. *Soit $h : x \mapsto x^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer ses variations.*

Exemple. *Déterminer les variations de $f\colon x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ puis dresser son tableau de variation.*

II.6 Compléments : extrema - tangentes

Définition II.14

Soit $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. Soient $M, m \in \mathbb{R}$.

1. On dit que f est **majorée par** M lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant M$.
2. On dit que f admet un **maximum** en $a \in I$ lorsque :
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a).$$
3. On dit que f est **minorée par** m lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geqslant m$.
4. On dit que f admet un **minimum** en $a \in I$ lorsque :
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a).$$
5. On dit que f est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.
6. Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Remarque.
- *Une fonction n'est pas toujours majorée/minorée :* $x \mapsto x^2$ *n'est pas majorée,* $x \mapsto x^3$ *n'est ni majorée, ni minorée.*
- *Un minorant n'est pas toujours un minimum : la fonction inverse sur* $]0, +\infty[$ *est minorée par* 0 *mais n'atteint jamais* 0*, ce n'est donc pas un minimum.*

Exemple. *On considère la fonction* $h\colon x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ *définie sur* $\mathbb{R}$*. Dresser le tableau de variation de* h *et donner ses éventuels extrema.*

Proposition II.15 : Tangente

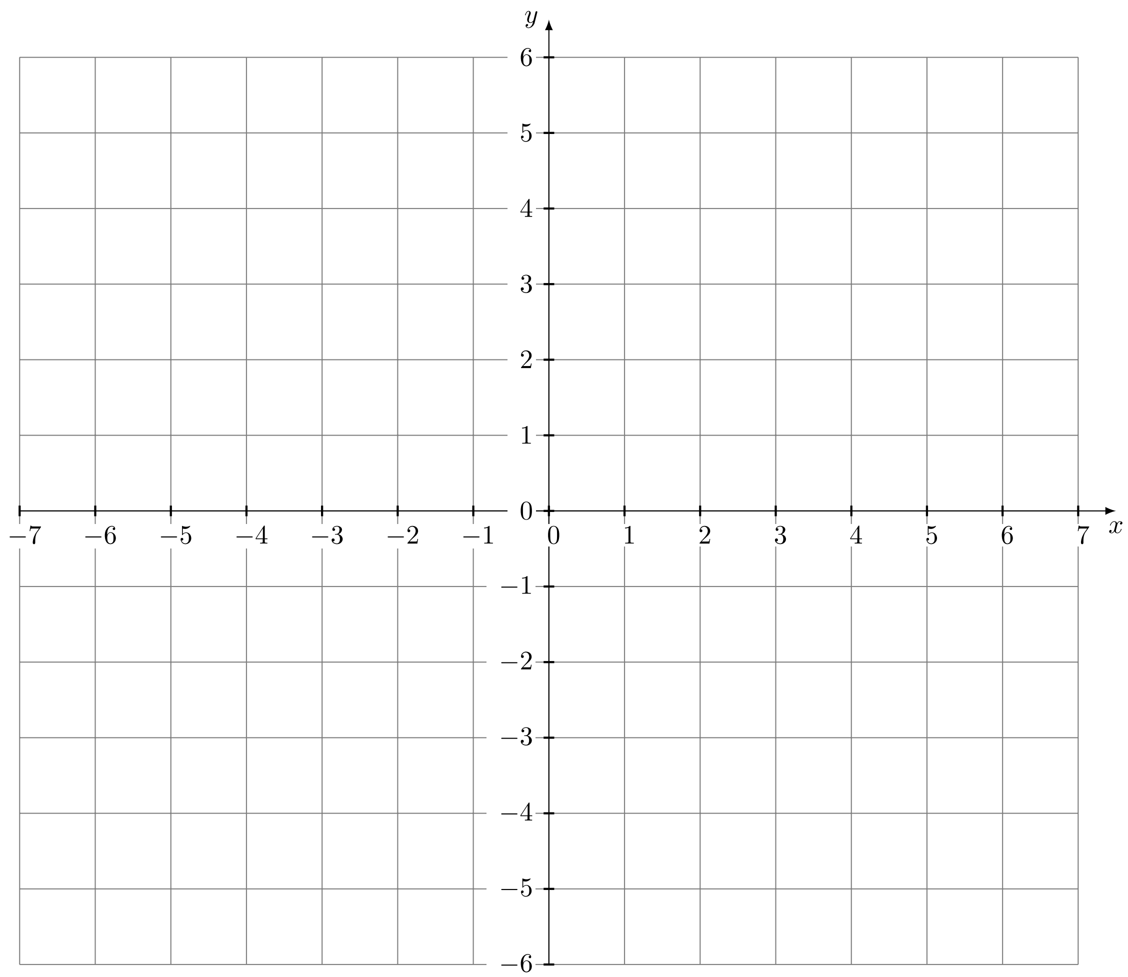
Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse a qui a pour équation
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple. *Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse* 2.

II.7 Allure de la courbe

On fait apparaître tous les résultats des questions précédentes (même si cela n'est pas explicitement demandé). C'est un travail de synthèse.

Exemple. *Allure de la courbe de f ($\ln(3) \approx 1.1$).*



III Inégalités – Inéquations – Équations

Premiers réflexes : Face à une équation/inéquation à résoudre ou à une inégalité à démontrer, voici les premiers éléments à envisager.

- Déterminer le domaine de définition des expressions en jeu.
- Est-ce un cas classique de cours (premier degré, second degré) ?
- Si non, regrouper les termes du même côté et essayer de **factoriser**.
- Si c'est une **inéquation**, après la factorisation, on réalise un **tableau de signe**.

La suite de cette partie envisage des cas où ce qui précède ne s'applique pas.

III.1 Utilisation des variations

Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2-3x+2}$.

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+1} > x-1$.

III.2 Étudier une fonction auxiliaire

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (démonstration de la croissance comparée).

III.3 Existence et unicité d'une solution de *f(x) = k*

Théorème III.1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $]a,b[$ ($a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$) et k un réel.
Si

- f est **continue** sur $]a,b[$;
- k est **compris entre** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

alors l'équation $f(x) = k$ a *au moins une* solution dans $]a,b[$.

Théorème III.2 : Théorème de la bijection

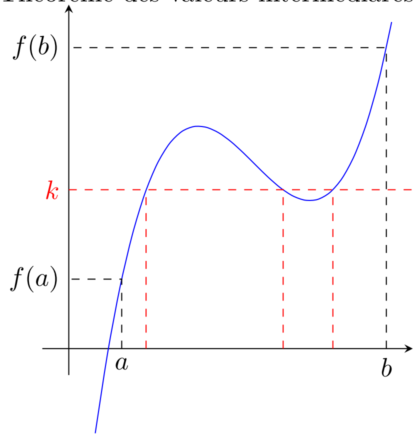
Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $]a,b[$ ($a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$) et k un réel.
Si

- f est **continue** sur $]a,b[$;
- f est **strictement monotone** sur $]a,b[$;
- k est **compris entre** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

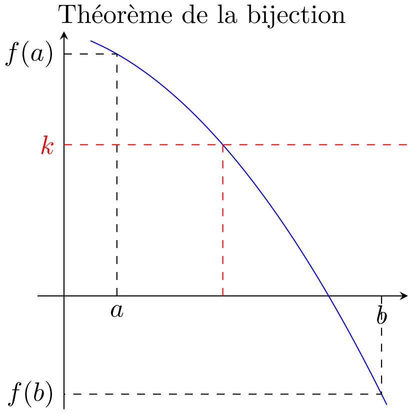
alors l'équation $f(x) = k$ *admet une unique* solution dans $]a,b[$.

Remarque. *Si f est définie sur $[a,b[$ (fermé en a), alors on pourra remplacer $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ par $f(a)$. Analogue en b.*

Théorème des valeurs intermédiares



Théorème de la bijection



Exemple. *Démontrer que l'équation $\ln(x) = x - 3$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.*

III.4 Avec la valeur absolue

Proposition III.3

Soit a un réel positif.

1. $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.
2. $|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$.

Exemple. *Résoudre* $|2x-1| \leqslant 4$

Exemple. *Résoudre* $|x^2-7| > 2$

Exemple. *Résoudre* $|2x-1| \leqslant |3x+2|$

Théorème III.4 : Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Démonstration.