ALS : Corrigé des exercices

Exercice 1

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y + z = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ x + y = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\iff} \begin{cases} (1-\lambda^2)\, y + (1+\lambda)\, z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ (1+\lambda) y - (1+\lambda) z = 0 \end{cases}$$

Cas 1 : si $1 + \lambda \neq 0$

$$\mathcal{S} \underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{1+\lambda} L_3 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{1+\lambda} L_1}}{\iff} \begin{cases} (1-\lambda)\, y + z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

car $1 - \lambda^2 = (1+\lambda)(1-\lambda)$

$$\iff \begin{cases} (2-\lambda)\, z = 0 \\ x + (1-\lambda)\, z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Cas 1a : si de plus $2 - \lambda \neq 0$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Cas 1b : si $\lambda = 2$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x - z = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = (z, z, z)$$

Cas 2 : si $\lambda = -1$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x = -y - z \iff (x, y, z) = (-y - z, y, z)$$

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions est :

→ $\{(0,0,0)\}$ si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 2$

→ $\{(z,z,z) \, , \; z \in \mathbb{R}\}$ si $\lambda = 2$

→ $\{(-y-z, y, z) \, , \; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\lambda = -1$

<u>Exercice 2</u>

1) Soit $M = {}^tAA$.

${}^tM = {}^tA \, {}^t({}^tA) = {}^tAA = M$ donc M est symétrique

2) On suppose que ${}^tX = X$.

Soit $M = {}^tAX + XA$.

$${}^tM = {}^tX \, {}^t({}^tA) + {}^tA \, {}^tX = XA + {}^tAX = M$$

donc M est symétrique.

3) On suppose ${}^tX = -X$ et $M = {}^tAX + XA$.

${}^tM = {}^tXA + {}^tAX = -XA + {}^tAX = -({}^tAX + XA) = -M$

Donc M est anti-symétrique.

<u>Exercice 3</u>

1) a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^3 - A^2 + 2A + 11 I_3 = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0_3$$

1b) On a :

$$A^3 - A^2 + 2A = -11 I_3$$

donc $-\frac{1}{11} A^3 + \frac{1}{11} A^2 - \frac{2}{11} A = I_3$

donc $A\left(-\frac{1}{11} A^2 + \frac{1}{11} A - \frac{2}{11} I_3 \right) = I_3$

⚠

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{11} A^2 + \frac{1}{11} A - \frac{2}{11} I_3$

<u>Calcul</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\left(-A^2 + A - 2 I_3 \right)$$

$$= \frac{1}{11}\left(-\begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4(A + I_4)$$

2b) On a

$$A^2 + 2A I_4 + I_4^2 = 4A + 4I_4 \quad (\text{car } AI_4 = I_4 A)$$

donc $A^2 - 2A = 3I_4$

donc $\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A = I_4$

donc $A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4\right) = I_4$ et ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$

$= 6A$

Supposons, par l'absurde, que A est inversible.

$A^2 = 6A$ donc $A^2A^{-1} = 6AA^{-1}$ donc $A = 6I_4$.

Absurde. Donc A n'est pas inversible.

Exercice 4

1) Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$PX = B \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\iff} \begin{cases} y = a + c \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a + c \\ z = -a + b - c \\ x = -a + b - 2c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -a + b - 2c \\ a + c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B$$

$\forall B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, $PX = B$ admet une unique solution

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vérification : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

2) $D = P^{-1} A P = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc D est bien diagonale.

3) Puisque D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

<u>Initialisation</u> : $A^0 = I_3$ et $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1}$

$$= P P^{-1} = I_3$$

Donc $A^0 = P D^0 P^{-1}$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P D^n P^{-1}$.

$$\begin{aligned} P D^{n+1} P^{-1} &= P D^n D P^{-1} \\ &= \underbrace{P D^n P^{-1}}_{= A^n} A P P^{-1} \\ &= A^n . A . I_3 \\ &= A^{n+1} \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $D = P^{-1} A P$

donc $P D P^{-1} = P P^{-1} A P P^{-1} = A$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$.

Il reste à faire le calcul.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ (-2)^n & 0 & (-2)^n \\ -4^n & 4^n & -4^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + (-2)^n + 4^n & 1 - 4^n & -2 + (-2)^n + 4^n \\ (-2)^n - 4^n & 4^n & (-2)^n - 4^n \\ 1 - 4^n & -1 + 4^n & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$