

# ALS : Corrigé des AOC

## AOC 1

$$1) \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 5y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \end{cases} \quad (= -2L_2 \text{ donc inutile})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left( -\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z \right)$$

donc  $\mathcal{F} = \left\{ \left( -\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$

autres résultats possibles :  $\mathcal{F} = \left\{ (x, -3x, -2x), x \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathcal{F} = \left\{ \left( -\frac{1}{3}y, y, \frac{2}{3}y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$

$$2) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - z = 1 \\ x - 5y + 6z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 4y - 3z = -1 \\ -4y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 4y - 3z = -1 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{cases} \begin{cases} x + z = 1 \\ z = 3 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$Y = \{(-2, 2, 3)\}$$

$$3) \begin{cases} 2x - y - z + t = -1 \\ 3x - 3y = 9 \\ x - z = 6 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \end{cases} \begin{cases} x - y + t = -7 \\ x - y = 3 \\ x - z = 6 \\ -y - z = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -10 \\ x = 7 \\ z = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$Y = \{(7, 4, 1, -10)\}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \begin{cases} 3x - y - 2t = 0 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \begin{cases} 3x - y - 2t = 0 \\ 5x - z - t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2t \\ z = 5x - t + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, 3x - 2t, 5x - t + 1, t)$$

$$S = \{(x, 3x - 2t, 5x - t + 1, t) \mid (x, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Autre résultats possibles :

$$S = \left\{ \left( x, -7x + 2z - 2, z, 5x - z + 1 \right), x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{5}z + \frac{1}{5}t - \frac{1}{5}, \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}t - \frac{3}{5}, z, t \right), z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}t, y, \frac{5}{3}y + \frac{7}{3}t + 1, t \right), y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \left\{ \left( -\frac{1}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{2}{7}, y, z, -\frac{5}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{3}{7} \right), y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \left\{ \left( x, y, \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}y + 1, \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \right), x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

## ADC 2

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$BX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$CY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$DY = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

## ADC 3

$${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$${}^t X = (1 \ 2)$$

## ADC 4

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Conjecture :  $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$  pour  $n \geq 1$ .

En  $n=1$  :  $M^1 = M = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$

Hérédité : soit  $n \geq 1$  tel que  $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

alors  $M^{n+1} = M^n M$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Rq :  $M^0 = I_3$

## ADCS

\*  $\det(A) = 6 \neq 0$  donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

\*  $\det(B) = 16 - 21 = -5 \neq 0$  donc  $B$  est inversible

et  $B^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 & 3/5 \\ 7/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

\*  $\det(C) = 15 + 27 = 42 \neq 0$  donc  $C$  est inversible

et  $C^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/42 & 1/14 \\ -3/14 & 1/14 \end{pmatrix}$

\*  $\det(D) = 0$  donc  $D$  n'est pas inversible.

\*  $E$  est diagonale et un de ses coefficients diagonaux est nul donc  $E$  n'est pas inversible

\*  $F$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont non nuls donc  $F$  est inversible et

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

\*  $G$  est triangulaire (supérieure) et un de ses coefficients diagonaux est nul donc  $G$  n'est pas inversible

\*  $H$  est triangulaire (inférieure) et un de ses coefficients diagonaux est nul donc  $H$  n'est pas inversible.

## AOC 6

a) Soient  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & = a \\ x + y & = b \\ x + 2y + z & = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} + b \\ z = -\frac{a}{2} - 2b + c \end{cases}$$

$\forall B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX = B$  a une unique solution  
donc  $A$  est invertible.

De plus,  $AX = B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 + b \\ -a/2 - 2b + c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} B$$

Donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

### Méthode 2

$$(A \mid I_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{-2}L_1} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Méthode 1: Soient  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = b \\ x + 2z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = -a + b \\ x + 2z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = 2a - b \\ x + z = -a + b \\ z = a - b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = 2a - b \\ x = -2a + 2b - c \\ z = a - b + c \end{cases}$$

$\forall B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX = B$  admet une unique solution donc

$A$  est inversible. La solution étant

$$X = \begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ 2a - b \\ a - b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} B$$

on a  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$



## Méthode 2

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

## ADC7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible (ADC6) donc

## Méthode 1 :

$$S: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \times 1 + 2 \times 3 - 1 \times (-1) \\ y = 2 \times 1 - 3 \\ z = 1 - 3 + (-1) \end{cases}$$

$$\text{càc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$$

## Méthode 2

$$S \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$