TD – AL4

Corrigé des PAPL

Exercice 5

Exercice 6 Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 7 **Injectivité de f :** Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $(f \circ g)(f(x)) = (f \circ g)(f(x'))$ c'est-à-dire $(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g \circ f)(x')$. Or, $f \circ g \circ f : E \to F$ est injective (car bijective) donc $x = x'$.

Ainsi, f est injective.

Surjectivité de f : Soit $y \in F$. Puisque $f \circ g \circ f : E \to F$ est surjective (car bijective), il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g \circ f)(x)$. On a alors $y = f((g \circ f)(x))$ donc $(g \circ f)(x) \in E$ est un antécédent de y par f.

Ainsi, f est surjective.

Conclusion : on en déduit que f est bijective.

Notons $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque est $h = f \circ g \circ f$ (qui sont toutes deux bijectives.)

Alors $f^{-1} \circ h \circ f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f \circ f^{-1}) = \mathrm{id}_E \circ g \circ \mathrm{id}_F = g$. Donc g est la composée d'applications bijectives : elle est bijective.