TD – AL4

Corrigé des exercices

Exercice 1 Supposons que ($A \cap B \subset A \cap C$) et ($A \cup B \subset A \cup C$). Montrons que $B \subset C$.
Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$. Or, $A \cup B \subset A \cup C$, donc $x \in A \cup C$. Il y a alors deux cas possibles :

- soit $x \in C$, et alors on a montré ce que l'on voulait ;
- soit $x \in A$ et dans ce cas, $x \in A \cap B$ (car on savait déjà que $x \in B$). Or $A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in A \cap C$. Ainsi, $x \in C$.

Dans tous les cas, $x \in C$, donc on a bien montré $B \subset C$.

Exercice 2 Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in E \cap F &\iff \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 2x + 2z \\ 3x + 5z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 2x + 2z \\ x = -\dfrac{5}{3}z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}z \\ x = -\dfrac{5}{3}z \end{cases} \\
&\iff u = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \\
&\iff u \in \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \quad z \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Donc

$$E \cap F = \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \quad z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 3 Soit $f : D = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z + 1 = z - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

   Cette équation n'a pas de solution, donc 1 n'a pas d'antécédent par f. Ainsi, f n'est pas surjective donc pas bijective.

2. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Résolvons $f(z) = Z$, d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = Z \Leftrightarrow z(1 - Z) = -Z - 1 \Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-1}$$

   car $Z \neq 1$. Il faut vérifier que la solution trouvée est bien dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. On remarque que cette solution est $z = f(Z)$, donc elle est bien dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ d'après la question 1.

Ainsi, pour tout $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, l'équation $f(z) = Z$ admet une unique solution dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Donc f réalise une bijection de $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur D. L'application réciproque associée est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ Z & \longmapsto & \dfrac{Z+1}{Z-1} \end{array}.$$

3. Si $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(z) = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a-1)^2 + b^2} + i\frac{-2b}{(a-1)^2 + b^2}$$

   - $$z \in A \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{-2b}{(a-1)^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

     donc $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   - $$z \in B \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a-1)^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}.$$

     Donc $B = \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

   - $$z \in C \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 = 1 \Leftrightarrow |z+1|^2 = |z-1|^2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2$$
     $$\Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

     Donc $C = i\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

1. $x \mapsto 4x - x^2 - 3$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$. Par composée, f est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 - 3 \geqslant 0\}.$$

Étudions le trinôme $4x - x^2 - 3$. $\Delta = 4$ et ses racines sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$. Puisque le coefficient dominant est $-1 < 0$:

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 - 3 \geqslant 0\} = [1, 3].$$

2. $x \mapsto 4x - x^2 - 3$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, f est dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 - 3 > 0\} =]1, 3[.$$

Soit $x \in]1, 3[$,

$$f'(x) = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

Puisque $\sqrt{4x - x^2 - 3} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

x	1		2		3
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. $f(1) = f(3)$ donc f n'est pas injective sur $\mathcal{D}_f$.
   Pour tout réel x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution. f n'est pas surjective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$.

4. - Soit $y \in f(\mathcal{D}_f)$. Il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$. Or $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Donc $y \in [0,1]$. Ceci montre : $f(\mathcal{D}_f) \subset [0,1]$.
   - Soit $y \in [0,1]$.
     - Sur l'intervalle $[1,2]$, f est continue car $x \mapsto 4x - x^2 - 3$ l'est et y est positive et que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (même méthode qu'à la question 1) ;
     - De plus, $y \in [f(1), f(2)]$.

     D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $[1,2]$. Donc $y \in f(\mathcal{D}_f)$. Ainsi $[0,1] \subset f(\mathcal{D}_f)$.

   Conclusion : par double-inclusion, $f(\mathcal{D}_f) = [0,1]$.

5. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,2]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[1,2]$ dans $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [0,1]$.
   Ceci signifie que $g\colon \begin{array}{ccc} [1,2] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sqrt{4x - x^2 - 3} \end{array}$ est une bijection.

   Cherchons l'expression de l'application réciproque. Soit $y \in [0,1]$. Soit $x \in [1,2]$.

   $g(x) = y \Leftrightarrow 4x - x^2 - 3 = y^2$ (car les deux nombres sont positifs) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + (3 + y^2) = 0$

   On a une équation du second degré en l'inconnue x.
   $\Delta = 4(1 - y^2) \geqslant 0$ car $y \in [0,1]$.

   - Si $y = 1$, $\Delta = 0$ et il y a une unique solution $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2 \in [1,2]$.
   - Si $y \in [0,1[$, $\Delta > 0$ et les racines réelles de l'équation sont

     $$x_1 = 2 - \sqrt{1 - y^2} \quad \text{et} \quad x_2 = 2 + \sqrt{1 - y^2}$$

     Or $1 - y^2 > 0$ donc $x_2 > 2$ ne convient pas. De plus, $0 < 1 - y^2 \leqslant 1$ donc $1 \geqslant x_1 < 2$. Ainsi, il y a une unique solution dans $[1,2]$ qui est $x_1 = 2 - \sqrt{1 - y^2}$.

   Remarquons que, si $\Delta = 0$, $x_0 = x_1$.

   On a montré que, pour tout $y \in [0,1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans $[1,2]$ qui vaut $x = 2 - \sqrt{1 - y^2}$. La réciproque de la fonction g est donc

   $$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [1,2] \\ y & \longmapsto & 2 - \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

Attention, f n'est pas bijective (voir question 3). Ne pas utiliser la notation f^{-1}.