TD AL4 : ADC

ADC 1

$$\mathcal{P}(\{2,4,6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$$

ADC 2

* Montrons $A \subset B$

Soit $u = (a-b+1,\ b+2,\ -2a+3b+1) \in A$

$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $\begin{cases} x = a-b+1 \\ y = b+2 \\ z = -2a+3b+1 \end{cases}$

$$2x - y + z = 2(a-b+1) - (b+2) + (-2a+3b+1)$$
$$= 1$$

Donc $u \in B$. Ainsi $A \subset B$

* Montrons $B \subset A$

Soit $u \in B$. $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $2x - y + z = 1$. (*)

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u = (a-b+1,\ b+2,\ -2a+3b+1).$$

$$u = (a-b+1,\ b+2,\ -2a+3b+1) \iff \begin{cases} x = a-b+1 \\ y = b+2 \\ z = -2a+3b+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a-y+3 \\ b = y-2 \\ z = -2a+3y-5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = x+y-3 \\ b = y-2 \\ z = -2x+y+1 \end{cases}$$

← vrai d'après (*)

Avec $a = x+y-3$ et $b = y-2$, on a

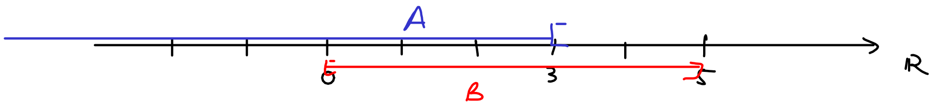
bien $u = (a-b+1,\ b+2,\ -2a+3b+1)$. Donc $u \in A$

Ainsi $B \subset A$.

* Conclusion : Par double inclusion, $A = B$.

AOC3

$A =]-\infty, 3[$, $B = [0,5]$



$A\cup B =]-\infty, 5]$, $A\cap B = [0,3[$, $A\setminus B =]-\infty, 0[$

$B\setminus A = [3,5]$; $\overline{A} = [3,+\infty[$, $\overline{B} =]-\infty,0[\,\cup\,]5,+\infty[$.

AOC 4

1) Soit $P\in \mathbb{R}_1[X]$. $P = aX+b$.

$$f(P) = 2X \iff P\left(\frac{X}{2}\right) + P'(1) = 2X$$

$$\iff a\frac{X}{2}+b + a = 2X$$

$$\iff \begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \\ b+a = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\iff P = 4X-4$$

$2X$ admet un seul antécédent par f : $P = 4X-4$

2) Montrons $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$ par double inclusion.

* $\underline{\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]}$

Soit $Q\in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $P\in\mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$Q = f(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P'(1)$$

<u>Méthode 1</u> Or $\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) = \deg(P) \times \deg\left(\frac{X}{2}\right) = \deg(P) \leq 1$

$\deg(P'(1)) \leq 0$

Donc $\deg(Q) \leq 1$ c'est-à-dire $Q\in\mathbb{R}_1[X]$.

<u>Méthode 2</u> : $P = aX + b$.

$$Q = f(P) = \frac{a}{2}X + b + a \in \mathbb{R}_1[X].$$

On a donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$.

* <u>$\mathbb{R}_1[X] \subset \mathrm{Im}(f)$</u>

Soit $Q \in \mathbb{R}_1[X]$. $Q = cX + d$.

On cherche $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $f(P) = Q$. Notons $P = aX+b$.

$$f(P) = Q \iff \frac{a}{2}X + b + a = cX + d$$

$$\iff \begin{cases} \frac{a}{2} = c \\ b + a = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2c \\ b = d - 2c \end{cases}$$

Donc $Q = f(P)$ avec $P = 2cX + d - 2c \in \mathbb{R}_1[X]$.

Ainsi $Q \in \mathrm{Im}(f)$. et donc $\mathbb{R}_1[X] \subset \mathrm{Im}(f)$.

* <u>Conclusion</u> : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

<u>ADC 5</u>

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto n^2 + 1.$$

* Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. tels que $h(n) = h(n')$

$$h(n) = h(n') \iff n^2 + 1 = n'^2 + 1$$

$$\iff n^2 = n'^2$$

$$\iff n = n' \quad \text{car} \quad n \geq 0 \text{ et } n' \geq 0$$

Donc h est injective

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n) \geq 1$ donc $h(n) = 0$ n'a pas de solution

Ainsi h n'est pas surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et donc pas bijective.

ADC 6

- f est rationnelle donc définie et dérivable sur $]1,+\infty[$.
- Soit $x > 1$

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

Donc f y est injective.

- $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$

x	1		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2

$\forall x \in \,]1,+\infty[$, $f(x) \geq 2$.

Donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]1,+\infty[$.

Ainsi f n'est pas surjective de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

ADC 7

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a = g(x,y)$ avec $(x,y) = (0,a) \in \mathbb{R}^2$.

Donc tout $a \in \mathbb{R}$ admet un antécédent par g : g est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- $g(0,0) = 0 = g(-1,2)$ donc 0 a au moins deux antécédents par g : g n'est pas injective.

Ex 8

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (2x-y \ , \ x-y)$$

Soit $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x,y)=u \iff \begin{cases} 2x-y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2b+y=a \\ x=b+y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=a-2b \\ x=a-b \end{cases}$$

$\forall u\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y)=u$ admet une unique solution $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Donc φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Sa réciproque est

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$u=(a,b) \longmapsto (a-b \ , \ a-2b)$$