AL4

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Table des matières

I Ensembles

I.1 Notations ensemblistes

Définition

Soit E un ensemble.

1. Pour dire que x est un élément de E (ou encore que x appartient à E), on note $x \in E$.
2. Une partie de E est un ensemble F inclus dans E, ce que l'on note $F \subset E$:

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in F \Rightarrow x \in E)$$

3. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
4. Deux ensembles sont égaux si ils ont les mêmes éléments :

$$\boxed{E = F \Longleftrightarrow \forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F) \Longleftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E)}$$

Exemple. Soit $E = \{0, 1\}$. Écrire $\mathcal{P}(E)$.

Méthode 1 : montrer une inclusion $A \subset B$

On considère $x \in A$ quelconque et on montre que $x \in B$.

Exemple. Montrer que $\{(a+3, 2a+4, -a+1),\ a \in \mathbb{R}\} \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 6\}$.

Méthode 2 : montrer que $A = B$.

Il y a deux méthodes :

- *par équivalence* « $a \in A \Leftrightarrow a \in B$ »
- *par double inclusion* « $A \subset B$ et $B \subset A$ ».

Exemple. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + 2y = 1 \text{ et } x - y = 3\} = \{(1, -2)\}$.

Exemple. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = 0\} = \{a(X^2 - 2X) + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exemple. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\} = \{(a + 1, 3a + 4), a \in \mathbb{R}\}$.

Proposition

1. $A \subset A$
2. Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$

I.2 Opérations

Définition : Complémentaire, réunion, intersection, différence

Étant donnés un ensemble E, et deux parties A et B de E, on appelle :

- **différence de A et B :** $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.
- **complémentaire de A dans E** : $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A$.
- **réunion de A et B** : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **intersection de A et B** :$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

Définition : Produit cartésien

Étant donnés un ensemble E, et deux parties A et B de E, on appelle :

- **Produit cartésien** : A et B étant deux ensembles, on note $A \times B$ l'ensemble des

$$A \times B = \{(a, b), a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Plus généralement, étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles, on définit :

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in A_i\}.$$

- On note A^2 le produit cartésien $A \times A$, et plus généralement $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in A\}$

Définition : Ensembles disjoints

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit qu'elles sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

I.3 Propriétés des opérations

Proposition

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$

Proposition : Lois de De Morgan

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \cup B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \text{ ou } x \in B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \cap B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \text{ et } x \in B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

Proposition : Distributivité

Pour $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

II Applications

II.1 Définitions et notations

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.
On appelle **application de E vers F** toute « correspondance » qui, à chaque élément x de E, fait correspondre un unique élément $f(x)$ de F, appelé **image** de x par f.
On note alors $f:\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
Pour $y \in F$ tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ s'appelle un **antécédent** de y.

Exemple. Une fonction est une application d'une variable réelle à valeurs réelle. Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple. Soit E un ensemble non vide. On appelle **application identité de E**, et on note id_E, l'application définie par :

$$\mathrm{id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Exemple (Indicatrice d'un ensemble). Soit A une partie non vide d'un ensemble non vide E. L'indicatrice de A est l'application $\mathbb{1}_A:\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Méthode 3 : Déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément $y \in F$.

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, 3x - 2y)$. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0, 1)$.

II.2 Ensemble image d'une application

Définition

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **ensemble image** de f, et on note $\text{Im}(f)$ ou $f(E)$ l'ensemble

$$f(E) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

C'est une partie de F.

Exemple. L'ensemble image de la fonction carrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

Méthode 4 : Déterminer l'ensemble image d'une application

Cas 1 : les fonctions. Le théorème de la bijection continue (quand on peut l'appliquer) donne l'ensemble image $f(I)$ (voir tableau fait au chapitre AN4).

Exemple. $f : x \mapsto \ln(x) + x$.

Exemple. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + 2y, x + y, x + 3y)$. Montrer que l'image de f est

$$\mathrm{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b - c = 0\}$$

II.3 Composition

Définition : Composition

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle **composée de f et g**, et on note $g \circ f$ l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Remarque. De manière générale, pour que $g \circ f$ soit correctement définie, il faut et il suffit que l'ensemble image de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g.

Proposition

Soient E, F, G, H quatre ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications.

1. Neutre : $\mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E$;
2. Associativité : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

II.4 Injections, surjections, bijections

a) Définitions et propriétés

Définition

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application.

- On dit que f est une **injection** de E dans F (ou qu'elle est **injective**) lorsque (plusieurs formulations)
  - tout élément y de F admet <u>au plus</u> un antécédent
  - OU pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E
  - OU $\forall\,(x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$
- On dit que f est une **surjection** de E dans F (ou qu'elle est **surjective**) lorsque (plusieurs formulations)
  - tout élément y de F admet <u>au moins</u> un antécédent
  - OU pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E
  - OU $\forall\,y \in F,\ \exists\,x \in E\,,\ y = f(x)$
  - OU $f(E) = F$.
- On dit que f est une **bijection** de E dans F (ou qu'elle est **bijective**) lorsque (plusieurs formulations)
  - elle est injective et surjective
  - tout élément y de F admet <u>exactement</u> un antécédent
  - OU pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E
  - OU $\forall\,y \in F,\ \exists!\,x \in E \mid y = f(x)$

Exemple. L'application identité id_E est une bijection de E dans E.

Remarque.

1. Ces notions dépendent des ensembles de départ et d'arrivée de f. On prendra donc soin de toujours les préciser explicitement.

2. Si f est injective sur E, on a plus précisément : $\forall\,(x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \iff x = x'$.

Définition : Application réciproque d'une bijection

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une **bijection.** L'application :

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

est appelée **application réciproque de** f.

Remarque. 1. Attention, la notation f^{-1} ne veut pas dire $\dfrac{1}{f}$.

2. la notation f^{-1} ne peut être utilisée que si f est bijective de E dans F.

3. « Réalise une bijection » $\neq$ « bijective ». Par exemple, la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) car elle n'est pas surjective (-1 n'a pas d'antécédent). En revanche, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit toujours de bien faire attention aux ensembles de départ et d'arrivée.

4. Étant donnés deux ensembles E et F, $f : E \longrightarrow F$ une bijection, et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sa réciproque, on a :
$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Proposition

1. Soient $f : E \to F$ une bijection et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque. Alors
   - f^{-1} est bijective de F dans E, de réciproque f donc $(f^{-1})^{-1} = f$;
   - $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
2. Réciproquement, si $f : E \longrightarrow F$ et $g \colon F \to E$ sont deux applications telles que
$$f \circ g = \mathrm{id}_F \text{ et } g \circ f = \mathrm{id}_E$$
alors elles sont bijectives, réciproques l'une de l'autre.

Corollaire

Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections, ayant pour réciproques respectivement f^{-1} et g^{-1}.
Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et sa réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration.

b) Méthodes

Méthode 5 : Montrer qu'une application est injective

On général, on montre que si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Exemple. Montrer que $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x^2) \end{array}$ est injective.

Exemple. Montrer que $g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X) \end{array}$ est injective.

<u>Cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles</u>

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est strictement monotone sur I, alors elle est injective sur I.

Attention ! ! ! ceci n'est valable que pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles (la notion de monotonie n'existant que dans ce cas).

Exemple. $f : x \mapsto 2x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc est injective sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Une fonction injective n'est pas forcément strictement monotone.

Méthode 6 : Montrer qu'une application est surjective

Il faut montrer que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution $x \in E$.

Cas 1 : on devine une solution.

Exemple. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ est surjective.

Cas 2 : il n'y a pas de solution évidente. On résout donc $f(x) = y$.

Exemple. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z) \end{array}$ est surjective.

Méthode 7 : Montrer qu'une application est bijective et déterminer sa réciproque

Exemple. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z} + 5 - i$ est bijective, et préciser sa réciproque.

Exemple. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est bijective, et préciser sa réciproque.

Remarque. Pour les fonctions, faire un tableau de variation pour y lire toutes les informations. On pensera à utiliser si besoin le théorème de la bijection ou le théorème des valeurs intermédiares.