AL4

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Table des matières

I Ensembles

I.1 Notations ensemblistes

Définition

Soit E un ensemble.

1. Pour dire que x est un élément de E (ou encore que x appartient à E), on note $x \in E$.
2. Une partie de E est un ensemble F inclus dans E, ce que l'on note $F \subset E$:
$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in F \Rightarrow x \in E)$$
3. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
4. Deux ensembles sont égaux si ils ont les mêmes éléments :
$$\boxed{E = F \iff \forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F) \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)}$$

Exemple. Soit $E = \{0, 1\}$. Écrire $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{ \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \emptyset \}$$

Rq : . $1 \in E$ mais $\{1\} \subset E$.

. En revanche, on écrit $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$

Méthode 1 : montrer une inclusion $A \subset B$

On considère $x \in A$ quelconque et on montre que $x \in B$.

Exemple. Montrer que $\underbrace{\{(a+3, 2a+4, -a+1),\ a \in \mathbb{R}\}}_{A} \subset \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 6\}}_{B}$.

Soit $u = (a+3, 2a+4, -a+1) \in A$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u \in B$.

$u = (x, y, z)$ avec $\begin{cases} x = a+3 \\ y = 2a+4 \\ z = -a+1 \end{cases}$

$3x - y + z = 3(a+3) - (2a+4) + (-a+1) = 6$

Donc $u \in B$.

Conclusion : $A \subset B$

Méthode 2 : montrer que $A = B$.

Il y a deux méthodes :

- *par équivalence* « $a \in A \Leftrightarrow a \in B$ »
- *par double inclusion* « $A \subset B$ et $B \subset A$ ».

Par équivalence **Exemple.** Montrer que $\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + 2y = 1 \text{ et } x - y = 3\}}_{A} = \underbrace{\{(1,-2)\}}_{B}$.

Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$u \in A \iff \begin{cases} 5x+2y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 15 + 5y + 2y = 1 \\ x = 3 + y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 7y = -14 \\ x = 3 + y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

$\iff u = (1,-2)$

$\iff u \in B$

Donc $A = B$

Exemple. Montrer que $\underline{\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = 0\}}_{A} = \underline{\{a(X^2 - 2X) + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}}_{B}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$P = aX^2 + bX + c$. $\quad P' = 2aX + b$

$P \in A \iff P'(1) = 0 \iff 2a + b = 0$

$\iff b = -2a$

$\iff P = aX^2 - 2aX + c$

$\iff P = a(X^2 - 2X) + c$

Donc $A = \{P = a(X^2 - 2X) + c, \quad (a,c) \in \mathbb{R}^2\} = B$

Double inclusion

Exemple. Montrer que $\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3x+1\}}_{A} = \underbrace{\{(a+1,3a+4), a\in\mathbb{R}\}}_{B}$.

* Montrons $B \subset A$

Soit $u = (a+1, 3a+4) \in B$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$u = (x, y)$ avec $\begin{cases} x = a+1 \\ y = 3a+4 \end{cases}$

$3x+1 = 3(a+1)+1 = 3a+4 = y$

Donc $u \in A$.

Ainsi $\boxed{B \subset A}$

* Montrons $A \subset B$.

Soit $u = (x,y) \in A$. On a $y = 3x+1$.

On veut montrer que $u \in B$. On cherche donc $a \in \mathbb{R}$. tel que $u = (a+1, 3a+4)$.

$u = (a+1, 3a+4) \iff \begin{cases} x = a+1 \\ y = 3a+4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = x-1 \\ y = 3(x-1)+4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = x-1 \\ y = 3x+1 \end{cases} \leftarrow$ vrai

Donc avec $a = x-1$, alors $u = (a+1, 3a+4) \in B$.

Donc $\boxed{A \subset B}$

Conclusion : Par double inclusion. $\boxed{A = B}$

Proposition

1. $A \subset A$
2. Si $A\subset B$ et $B\subset C$, alors $A\subset C$

I.2 Opérations

Définition : Complémentaire, réunion, intersection, différence

Étant donnés un ensemble E, et deux parties A et B de E, on appelle :

- **différence de** A **et** B **:** $A\setminus B = \{x\in A \mid x\notin B\}$.
- **complémentaire de** A **dans** E : $\overline{A} = \{x\in E \mid x\notin A\} = E\setminus A$.
- **réunion de** A **et** B : $A\cup B = \{x\in E \mid x\in A \text{ ou } x\in B\}$
- **intersection de** A **et** B :$A\cap B = \{x\in E \mid x\in A \text{ et } x\in B\}$

Définition : Produit cartésien

Étant donnés un ensemble E, et deux parties A et B de E, on appelle :

- **Produit cartésien** : A et B étant deux ensembles, on note $A \times B$ l'ensemble des

$$A \times B = \{(a,b), a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Plus généralement, étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles, on définit :

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i \in A_i\}.$$

- On note A^2 le produit cartésien $A \times A$, et plus généralement $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i \in A\}$

Définition : Ensembles disjoints

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit qu'elles sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

I.3 Propriétés des opérations

Proposition

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$

Proposition : Lois de De Morgan

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \cup B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \text{ ou } x \in B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \cap B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow \text{"}x \in A \text{ et } x \in B\text{" est faux} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

Proposition : Distributivité

Pour $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

II Applications

II.1 Définitions et notations

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.
On appelle **application de E vers F** toute « correspondance » qui, à chaque élément x de E, fait correspondre un unique élément $f(x)$ de F, appelé **image** de x par f.
On note alors $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
Pour $y \in F$ tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ s'appelle un **antécédent** de y.

Exemple. Une fonction est une application d'une variable réelle à valeurs réelle. Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple. Soit E un ensemble non vide. On appelle **application identité de** E, et on note id_E, l'application définie par :

$$\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Exemple (Indicatrice d'un ensemble). Soit A une partie non vide d'un ensemble non vide E. L'indicatrice de A est l'application $\mathbb{1}_A: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Méthode 3 : Déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément $y \in F$.

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, 3x - 2y)$. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0, 1)$.

soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (0,1) \iff (2x-y\ ,\ 3x-2y) = (0,1)$$
$$\iff \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=2x \\ -x=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$$

L'ensemble des antécédents de $(0,1)$ par f est $\{(-1,-2)\}$

⚠ $\{(-1,-2)\} \neq \{-1, -2\}$

1 élément de $\mathbb{R}^2$

2 éléments de $\mathbb{R}$

II.2 Ensemble image d'une application

Définition

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **ensemble image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(E)$ l'ensemble

$$f(E) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

C'est une partie de F.

Exemple. L'ensemble image de la fonction carrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

Méthode 4 : Déterminer l'ensemble image d'une application

Cas 1 : les fonctions. Le théorème de la bijection continue (quand on peut l'appliquer) donne l'ensemble image $f(I)$ (voir tableau fait au chapitre AN4).

Exemple. $f : x \mapsto \ln(x) + x$.

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de la bijection dit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty,+\infty[$.

En particulier, l'ensemble image $f(\mathbb{R}_+^*)$ est $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty,+\infty[$.

Exemple. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x$.

· f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} + 1$.

· $f'(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq 1 \iff -x \leq 0 \iff x \geq 0$ par stricte croissance de exp.

· $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme

$f(x) = e^{-x}(1 + xe^{x}) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ car $xe^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par CC.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On devine $f(\mathbb{R}) = [1,+\infty[$.

On le montre par double inclusion.

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ car 1 est le minimum donc $f(x) \in [1,+\infty[$

$f(\mathbb{R}) \subset [1,+\infty[$

* Réciproquement, soit $y \in [1,+\infty[$. On veut montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Puisque f est continue sur $[0,+\infty[$ et que $y \in [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$, d'après le TVI, $y = f(x)$ a au moins une solution $x \in [0,+\infty[$.
Donc $y \in f(\mathbb{R})$ et ainsi $[1,+\infty[\subset f(\mathbb{R})$.

Conclusion : $f(\mathbb{R}) = [1,+\infty[$.

Double inclusion

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + 2y, x + y, x + 3y)$. Montrer que l'image de f est

$$\mathrm{Im}(f) = \overbrace{\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b - c = 0\}}^{A}$$

* Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$. $u = f(x,y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$u = (x+2y,\ x+y,\ x+3y)$ donc $u = (a,b,c)$ avec

$\begin{cases} a = x+2y \\ b = x+y \\ c = x+3y \end{cases}$. Ainsi $2a-b-c = 2(x+2y) - (x+y) - (x+3y) = 0$

Donc $u \in A$.

* Soit $u \in A$. $u = (a,b,c)$ avec $2a-b-c = 0$ $(*)$

On veut montrer que $u \in \mathrm{Im}(f)$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = f(x,y)$.

$u = f(x,y) \iff \begin{cases} x+2y = a \\ x+y = b \\ x+3y = c \end{cases} \iff \begin{cases} b+y = a \\ x = b-y \\ b+2y = c \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = a-b \\ x = b-(a-b) \\ b+2(a-b) = c \end{cases} \iff \begin{cases} y = a-b \\ x = -a+2b \\ 2a-b = c \end{cases}$ ← vrai d'après $(*)$

Avec $(x,y) = (-a+2b,\ a-b)$ on a bien $u = f(x,y)$ donc $u \in \mathrm{Im}(f)$.

Ainsi $A \subset \mathrm{Im}(f)$.

Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = A$.

II.3 Composition

Définition : Composition

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle **composée de f et g**, et on note $g \circ f$ l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Remarque. De manière générale, pour que $g \circ f$ soit correctement définie, il faut et il suffit que l'ensemble image de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g.

Proposition

Soient E, F, G, H quatre ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications.

1. Neutre : $\mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E$;
2. Associativité : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.