TD6 – AL3

Polynômes et factorisation

Applications directes du cours

ADC1 Soient $P = X^2 + 3X - 2$ et $Q = 6X - X^2 + 1$. Déterminer $P + Q$, $3P - 2Q$, P^3, PQ et $P(Q(X))$.

ADC2 Déterminer le degré des polynômes suivants :

1. $P_1 = X^3 - (X-2)^2$
2. $P_2 = X^3 - X(X-2)^2$
3. $P_3 = (X+1)^{10} - (4X^2+1)^8$
4. $Q_n = \prod_{k=1}^{n}(2X^k - 1)$

Ne calculez pas P_3 et Q_n, essayez d'appliquer les résultats du cours.

ADC3
1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $P(-1) = -2$ et $P(0) = 1$.
2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(-1) = -2$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

ADC4 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$
2. $2X^5 + X^3 + 17X - 2$ par $X^2 + 2X + 3$

ADC5 Soit $P = -3X^2 + 6X - 6$. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

ADC6 Soit $P = X^3 - X^2 - 14X + 24$.
Montrer que 2 est racine de P puis factoriser (au maximum) P dans $\mathbb{R}[X]$.

ADC7 Montrer que -1 est racine triple de $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ et factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercices

Exercice 1 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on définit $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ puis calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ et $f(X^3)$.

Exercice 2 On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} T_0 = 1,\ T_1 = 2X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n.

Exercice 3 On souhaite déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$. On va raisonner par **analyse-synthèse**.

1. **Analyse** : on suppose que P est une solution de l'équation $(P')^2 = 4P$. On cherche à identifier P. Que pouvez-vous dire du degré de P ?

2. **Synthèse :** On considère les polynômes P qui sont soit nuls soit de degré 2. Déterminer lesquels sont vraiment solutions de l'équation $(P')^2 = 4P$.

Exercice 4

1. Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R(2)$ puis en déduire R.

2. Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R'(1)$ puis en déduire R.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos(t)) = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$;
2. $P_2 = X^4 - 5X^2 + 6$;
3. $P_3 = X^6 - 1$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 Déterminer le degré de

$$P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant la dérivée du polynôme $P = (X+1)^n$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
On procèdera par analyse-synthèse, comme dans l'exercice 3.

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.

2. En déduire que P est constant.