TD AL3 : Pour aller plus loin

Exercice 7

* si $n=0$, $P_n = 1-1=0$ donc $\deg(P_n) = -\infty$.
* soit $n \geq 1$.

$P_n = Q + R$ avec $\deg(Q) = n = \deg(R)$ donc le cours ne donne pas de résultat précis : $\deg(P_n) \leq n$.

Regardons P_n plus précisément.

D'après la formule du binôme de Newton :

$$P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1-(-1)^{n-k}\right) X^k$$

On cherche le rang maximal avec un coefficient non nul.

→ coefficient de X^n : $\binom{n}{n}\left(1-(-1)^0\right) = 0$

→ coefficient de X^{n-1} : $\binom{n}{n-1}\left(1-(-1)^1\right) = 2n \neq 0$ (car $n \geq 1$)

donc $\deg(P_n) = n-1$ (et le coefficient dominant est $2n$).

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$P = (X+1)^n$

$P' = n(X+1)^{n-1}$ donc $P'(1) = n\,2^{n-1}$

Or $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k}$

Donc $P' = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k X^{k-1}$

Ainsi $P'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ car le terme en $k=0$ est nul.

Donc $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

Exercice 9

Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)\,P(X)$.

Notons $d = \deg(P)$.

* Soit $P = 0$ $(d = -\infty)$ ← Ne pas écrire de calcul avec $-\infty$. On le met de côté.

* Soit $d \geqslant 1$.

$$\deg(P(X^2)) = \deg(P) \times \deg(X^2) = 2d$$

$$\deg((X^2+1)\,P(X)) = \deg(X^2+1) + \deg(P) = 2 + d$$

Donc $2d = 2 + d$ donc $d = 2$.

Si P est solution, soit $P = 0$, soit $\deg(P) = 2$.

Synthèse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

* $P = 0$ est bien solution

* Supposons que $\deg(P) = 2$. $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

$(X^2+1)(aX^2+bX+c)$

$$P(X^2) = (X^2+1)\,P(X) \iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ b = a + c \\ b = 0 \\ c = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}$$

$$\iff P = aX^2 - a$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\{0\} \cup \{aX^2 - a,\ a \in \mathbb{R}^*\} = \{aX^2 - a,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 10

1) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n)=0$

* $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$

* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n) = 0$.

$Q(n+1) = P(n+1) - P(0)$

$= P(n) - P(0)$ car $P(X+1) = P(X)$ donc $P(n+1) = P(n)$

$= Q(n)$

$= 0$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $Q(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Q admet une infinité de racines (tous les $n \in \mathbb{N}$) donc $Q = 0$.

Ainsi $P(X) = P(0)$ donc P est constant.