TD AL3 : Correction des exercices

Exercice 1

$f(P) = P(X+1) - P(X)$.

* soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.

$f(P) = a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - (aX^3 + bX^2 + cX + d)$
$= 3aX^2 + (3a + 2b)X + (a+b+c) \in \mathbb{R}_2[X]$.

* si $P = 1$, $P(X) = 1$ et $P(X+1) = 1$ donc $f(1) = 0$
* si $P = X$, $P(X) = X$ et $P(X+1) = X+1$ donc $f(X) = 1$
* si $P = X^2$, $P(X) = X^2$ et $P(X+1) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

donc $f(X^2) = 2X + 1$

* si $P = X^3$, $P(X) = X^3$ et $P(X+1) = (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$

donc $f(X^3) = 3X^2 + 3X + 1$.

Exercice 2

1) $T_2 = 2X\,T_1 - T_0 = 4X^2 - 1$

$T_3 = 2X\,T_2 - T_1 = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 6X$

2) Notons $cd(P)$ le coefficient dominant de $P \neq 0$.

Initialisation

$n=0$: $T_0 = 1$. $\deg(T_0) = 0$ et $cd(T_0) = 1 = 2^0$

$n=1$: $T_1 = 2X$. $\deg(T_1) = 1$ et $cd(T_1) = 2 = 2^1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$\deg(T_n) = n$, $cd(T_n) = 2^n$

et $\deg(T_{n+1}) = n+1$, $cd(T_{n+1}) = 2^{n+1}$

Alors
$T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n$

$\deg(2X\,T_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = 1 + n + 1 = n+2 > \deg(T_n)$

Donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2X\,T_{n+1}) = n+2$

Le terme en X^{n+2} (terme dominant) de T_{n+2} provient aussi de $2X\,T_{n+1}$.

Or $T_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + R$ avec $\deg(R) < n+1$.

$2X\,T_{n+1} = 2^{n+2}X^{n+2} + 2XR$ avec $\deg(2XR) = 1 + \deg(R) < n+2$.

Ainsi $cd(T_{n+2}) = 2^{n+2}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence double,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et $cd(T_n) = 2^n$.

Exercice 3

1) **Analyse** : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est solution de $(P')^2 = 4P$.

Notons $d = \deg(P)$.

$$\deg(P') = \begin{cases} d-1 & \text{si } d \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } d = 0 \text{ ou } d = -\infty \end{cases}$$

* si $d \geqslant 1$

$\deg((P')^2) = 2(d-1) = 2d-2$

$\deg(4P) = d$.

Donc $2d - 2 = d$ donc $d = 2$.

* si $d \leqslant 0$

$P' = 0$ donc $(P')^2 = 4P \iff P = 0$.

si P est solution, soit $P = 0$ soit $\deg(P) = 2$.

2) **Synthèse** : Prenons maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = 0$ ou $\deg(P) = 2$. Cherchons quels P sont vraiment solution.

* $P = 0$ est bien solution.

* supposons $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

$(P')^2 = 4P \iff (2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c)$

$\iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$

$$\iff \begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b(a-1) = 0 \\ c = \frac{b^2}{4} \end{cases}$$

impossible car $a \neq 0$

$$\iff \begin{cases} a = 0 & \text{ou} & a = 1 \\ b = 0 & \text{ou} & a = 1 \\ c = \frac{b^2}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ c = \frac{b^2}{4} \end{cases}$$

$$\iff P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$$

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions est :

$$\{0\} \cup \left\{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \;,\; b \in \mathbb{R}\right\}.$$

<u>Exercice 4</u>

1) La division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$ s'écrit :

$$\begin{cases} X^n = (X-1)(X-2)\,Q(X) + R(X) \quad (*) \\ \deg(R) < \deg((X-1)(X-2)). \end{cases}$$

* $\deg(R) < 2$ donc $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
* Évaluons $(*)$ en 1 :

$$1^n = 0 \times Q(1) + R(1) = a + b$$

Évaluons $(*)$ en 2

$$2^n = 0 + R(2) = 2a + b$$

Or

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ 2(1-b) + b = 2^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 - b \\ 2 - b = 2^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Donc $R = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

2) $P = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$.

La division euclidienne de X^n par P s'écrit :

$$\begin{cases} X^n = P(X)\,Q(X) + R(X) \quad (*) \\ \deg(R) < \deg(P) \end{cases}$$

* $\deg(R) < 2$ donc $R = aX+b$.

* Évaluons $(*)$ en 1 : $1^n = P(1)\,Q(1) + R(1)$
$= 0 + R(1)$
$= a+b$

* Dérivons $(*)$ et évaluons en 1 :

$$n X^{n-1} = P'(X)\,Q(X) + P(X)\,Q'(X) + R'(X)$$

$$n\, 1^{n-1} = P'(1)\,Q(1) + P(1)\,Q'(1) + R'(1)$$

Or $P(1) = 0$

$P'(X) = 2X - 2$ donc $P'(1) = 0$.

$R'(X) = a$ donc $R'(1) = a$

Ainsi $n = a$.

On a donc $\begin{cases} a = n \\ a+b = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = n \\ b = 1-n \end{cases}$

Ainsi $R = nX + 1 - n$.

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \quad P(\cos(t)) = 0$.

Les réels $\cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$ sont tous des racines de P.

Donc P a une infinité de racines.

D'après le cours, $P = 0$.

Exercice 6

1) $P_1 = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$

* On cherche une racine évidente :

$P_1(1) = 1 + 3 - 5 + 1 = 0$ donc 1 est racine de P

* On en déduit que $X-1$ divise P..

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + 3X^2 - 5X + 1 & X - 1 \\
\cline{2-2}
-(X^3 - X^2) & X^2 + 4X - 1 \\
\cline{1-1}
4X^2 - 5X + 1 & \\
-(4X^2 - 4X) & \\
\cline{1-1}
-X + 1 & \\
-(-X + 1) & \\
\cline{1-1}
0 & \\
\end{array}
$$

Donc $P = (X-1)(X^2 + 4X - 1)$.

$\Delta(X^2 + 4X - 1) = 16 - 4 = 12$.

$x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$

$x_2 = -2 + \sqrt{3}$

Donc

$$P = (X-1)\big(X - (-2-\sqrt{3})\big)\big(X - (-2+\sqrt{3})\big)$$

2) $P_2 = X^4 - 5X^2 + 6$

Soit $Q = X^2 - 5X + 6$.

$\Delta(Q) = 25 - 24 = 1$. Les racines de Q sont 2 et 3

donc $Q = (X-2)(X-3)$

$$
\begin{aligned}
P_2 &= Q(X^2) \\
&= (X^2 - 2)(X^2 - 3) \\
&= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})
\end{aligned}
$$

3) $P_3 = X^6 - 1$.

* Cherchons les racines complexes de $\mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}$.

* $z = 0$ n'est pas racine de P.
* Notons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$P(z) = 0 \iff z^6 = 1$$
$$\iff r^6 e^{6i\theta} = 1\, e^{i0}.$$
$$\iff \begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} r = 1 & \text{car } r > 0 \\ \theta = \frac{k\pi}{3} & , \; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
$$\iff z = e^{ik\pi/3}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

* Les $e^{ik\pi/3}$, $k \in [\![0, 5]\!]$ sont 6 racines distinctes de P.

Comme $\deg(P) = 6$, ces racines sont simples et ce sont les seules racines de P :

$$P = 1 \cdot \prod_{k=0}^{5} \left(X - e^{ik\pi/3}\right)$$
$$= (X-1)\underline{(X - e^{i\pi/3})}\underline{(X - e^{2i\pi/3})}(X+1)\underline{(X - e^{4i\pi/3})}\underline{(X - e^{5i\pi/3})}$$
$$= (X-1)(X+1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})\,(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})$$
$$= (X-1)(X+1)\left(X^2 - (e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3})X + 1\right)\left(X^2 - (e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3})X + 1\right)$$
$$= (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2\cos(\pi/3) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$$

et $\Delta(X^2 - X + 1) = -3 < 0$

$\Delta(X^2 + X + 1) = -3 < 0$