Théorème III.1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration : Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\text{« } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ »}$$

Initialisation : si $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{\substack{\ell=1 \\ (\ell=k+1)}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ \text{(on revient à} \\ \text{la lettre } k)}}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} b^0\right) + \left(a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}\right) && \text{extraction de termes} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} && \text{formule de Pascal} \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 && \text{car } \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{regroupement}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la formule

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.