IV Exemples de sommes doubles

IV.1 Sommes rectangulaires

Définition IV.1

Soit (a_{ij}) une famille de nombre complexes, $n, m, p, q \in \mathbb{N}$. On note :

$$\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=p}^{q} a_{ij} \right) = \sum_{j=p}^{q} \left(\sum_{i=m}^{n} a_{ij} \right)$$

Si $m = p$ et $n = q$, on pourra noter cette somme $\displaystyle\sum_{m \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$.

Exemple. On souhaite calculer : $S = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} a_{i,j}$.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$

Il y a deux façons de le faire : par ligne ou par colonne.

Par ligne : $S = (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}(a_{i,1}+a_{i,2}+a_{i,3}) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\right)$.

Par colonne : $S = (a_{1,1}+a_{2,1})+(a_{1,2}+a_{2,2})+(a_{1,3}+a_{2,3}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3}(a_{1,j}+a_{2,j}) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{i,j}\right)$.

Exemple.

- $$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n} ni = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

  ou alors
  $$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

- $$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} ij\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

IV.2 Sommes triangulaires

On peut aussi définir une somme double sur un tableau non rectangulaire, par exemple :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

Exemple. On souhaite calculer : $S = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} a_{i,j}$.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$i=3$			$a_{3,3}$

Il y a deux façons de le faire : par ligne ou par colonne.

Par ligne : $S = (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}) + (a_{2,2}+a_{2,3}) + (a_{3,3}) = \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\sum\limits_{j=i}^{3} a_{i,j}\right)$.

Par colonne : $S = (a_{1,1}) + (a_{1,2}+a_{2,2}) + (a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}) = \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\sum\limits_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i \\
&= \sum_{i=1}^{n}((n+1)i-i^2) \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$