MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

Vendredi 15 mai 2020 – 4h

Ce sujet contient 2 exercices indépendants.

À rendre avant 18h sur Moodle, en format pdf (un seul fichier) : utilisez une application dédiée ou convertissez vos images en un seul pdf (sur `https://jpg2pdf.com` *par exemple).*

EXERCICE 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \dots, n$.
Autrement dit :

- à l'instant $n = 1$, il se déplace aléatoirement en 0 ou 1 ;
- à l'instant $n = 2$, il se déplace aléatoirement en $0,\ 1$ ou 2 ;
- etc.

On suppose les déplacement successifs indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

Partie I : Résultats préliminaires

On introduit

- la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;
- la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;
- la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = H_n - \ln(n)$.

1. (a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

   (b) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n+1}$. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

2. Écrire une *fonction Scilab* permettant de calculer v_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné.

3. Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$? *Justifier, bien entendu.*

4. (a) À l'aide d'un développement limité, justifier que $v_n - v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n+1})$.

   (c) Démontrer la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ vers un réel γ (on ne demande pas de déterminer ce réel). En déduire un équivalent de H_n quand $n \to +\infty$.

Partie II : Étude de variables aléatoires discrètes

5. Reconnaître, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n. En déduire que X_n possède une espérance et une variance, que l'on pécisera.

6. On note A_n l'événement « le mobile revient en O pour la première fois au bout de n déplacements », pour $n \in \mathbb{N}^*$.
** « revient » signifie qu'on ne compte pas la position à l'instant* 0. *Lorsque le mobile « revient en O pour la première fois », c'est en fait la deuxième fois qu'il se situe en O.*

   (a) Déterminer $P(A_1)$ et $P(A_2)$.

   (b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement A_n à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (c) Montrer que l'événement A : « le mobile revient au moins une fois en O » est presque certain.

7. On note alors Y la variable aléatoire égale au rang du premier retour à l'origine du mobile.

   (a) Expliquer pourquoi Y ne suit pas une loi géométrique.

   (b) Donner la loi de Y.

   (c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? *Si oui, on ne demande pas de calculer cette espérance.*

8. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire bien définie sur notre univers.

   (a) Donner $Z(\Omega)$.

   (b) Déterminer pour tous entiers $k \geqslant n \geqslant 1$, la probabilité $P_{[Y=k]}(Z=n)$.

   (c) Établir que :
   $$\forall k, n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } k \leqslant n-1, \quad P_{[Y=k]}(Z=n) = \frac{k+1}{n(n+1)}.$$

   (d) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z=n)$ à l'aide de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (e) Déterminer si la variable aléatoire Z admet une espérance. *Si oui, on ne demande pas de calculer cette espérance.*

Partie III : Simulation

9. Écrire des commandes `Scilab` calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n-ième déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

10. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n = 0
a = 0
while a < ...
    n = n+1
    if grand(1,1,"uin",...,...) == 0 then
        a = a+1
        if a == 1 then
            y = ...
        end
    end
end
disp(...,"Y =")
disp(...,"Z =")
```

EXERCICE 2

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On notera id l'application identité $\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

Partie I : Étude d'une application

Cette partie est indépendante des deux suivantes.
On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & a-c+d \\ -2a+2c-2d & -2a+c-d \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire le rang de f et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle un automorphisme ?
4. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.
6. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Montrer que f est une projection et préciser, en donnant des bases, ses espaces caractéristiques.

Partie II : Étude d'un espace vectoriel

On définit :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

8. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
9. Etablir que $\mathscr{E}$ est stable par multiplication, c'est-à-dire : $\forall (M,N) \in \mathscr{E}^2, MN \in \mathscr{E}$.
10. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathscr{E}$.

Partie III : Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{E}$

Soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice de $\mathscr{E}$, on note $g(M) = TMT$.

11. Déterminer l'expression de $g(M)$ pour $M \in \mathscr{E}$.
12. Montrer que g est un automorphisme de $\mathscr{E}$.
13. Vérifier que T est inversible et en déduire l'expression de g^{-1}.
14. Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(g - \lambda\mathrm{id})$.