Mathématiques - Devoir surveillé n° 6

Vendredi 27 mars 2020 – 4h

Ce sujet contient 4 exercices indépendants.

Exercice 1 – Applications directes du cours

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!4^n}$ est convergente et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente et calculer sa somme.
3. Déterminer la nature de la série suivante : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{n}\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right)$.
4. Déterminer la nature de la série suivante : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n+1)\ln(n)^2}{n^3}$.

Exercice 2

On considère une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule de couleur *opposée* à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après k tirages. On a $X_0=1$.

On notera :

- B_k l'événement : « on pioche une boule blanche au k-ième tirage ».
- N_k l'événement : « on pioche une boule noire au k-ième tirage ».

1. (a) Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
   (b) Comment réaliser une simulation de X_1 en Scilab ?
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$P(X_2=1)=\frac{1}{6},\quad P(X_2=2)=\frac{2}{3},\quad P(X_2=3)=\frac{1}{6}.$$
3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$, en justifiant brièvement.
4. (a) Soient $i\in\mathbb{N}^*$ et $j\in X_k(\Omega)$. Déterminer $P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)$
   (on distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).
   (b) Démontrer alors que :
$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall i\in X_{k+1}(\Omega),\quad P(X_{k+1}=i)=\frac{i}{k+2}P(X_k=i)+\frac{3+k-i}{k+2}P(X_k=i-1).$$
5. Déterminer alors la loi de X_3.

EXERCICE 3

Les deux parties sont indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'application $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x + y - z, 2x + 4y - 2z, x + y + z) \end{array}$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(g)$.
3. (a) Montrer que $g^2 - 6g + 8\text{id}_{\mathbb{R}^3} = 0$.
   (b) Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression de g^{-1}.
   (c) Déterminer $\text{Ker}(g)$.
4. (a) Déterminer une base de $F = \text{Ker}(g - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Déterminer une base de $G = \text{Ker}(g - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (c) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G, qui sera notée p.

DEUXIÈME PARTIE

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 6f + 8\text{id}_E = 0$.
On pose $h_1 = f - 2\text{id}_E$ et $h_2 = f - 4\text{id}_E$.

5. (a) Calculer $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$.
   (b) En déduire que $\text{Im}(h_1) \subset \text{Ker}(h_2)$ et que $\text{Im}(h_2) \subset \text{Ker}(h_1)$.
6. Montrer que $E = \text{Ker}(h_1) \oplus \text{Ker}(h_2)$. *On pourra procéder par analyse-synthèse.*
7. Montrer que $q = \frac{1}{2}f - \text{id}_E$ est une projection. Déterminer, à l'aide de h_1 et h_2, ses espaces caractéristiques.

EXERCICE 4

On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 e^x \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^x - 1 \end{array}.$$

La première partie est indépendante des deux autres.

PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE D'UNE SÉRIE

Dans cette partie, on étudie la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{f(n)}$, $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.
3. En déduire un programme Scilab qui calcule une *valeur approchée* de S à 10^{-4} près.

DEUXIÈME PARTIE : ÉTUDE DE φ

4. Étudier les variations (on sera précis) de φ.
5. Dresser le tableau de variation complet de φ, en précisant sa valeur en 0.
6. Montrer que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une unique solution, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]0;1[$.

TROISIÈME PARTIE : ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

7. Écrire une fonction Scilab d'entête `function v = suite_v(n)` qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de v_n.
8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 1$.
9. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. Justifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on déterminera.