# MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Vendredi 7 février 2020 – 4h

**Ce sujet contient 4 exercices indépendants.**

## EXERCICE 1 – APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

1. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier l'existence puis calculer $I_1 = \displaystyle\int_4^5 \frac{1}{3-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Déterminer une primitive de Arctan sur $\mathbb{R}$, en utilisant une intégration par parties.
4. Justifier l'existence puis calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2-\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$, en posant $x = \cos(t)$.
5. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^2) + P'(X+1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 3x + 6z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,1,1)$ et $u_2 = (0,-1,1)$.
   (a) Soit $v_1 = (1,1,1)$. A-t-on $v_1 \in F$ ? $v_1 \in G$ ?
   (b) Soit $v_2 = (1,3,-1)$. A-t-on $v_2 \in F$ ? $v_2 \in G$ ?
   (c) Soit $v_3 = (3,1,3)$. A-t-on $v_3 \in G$ ?

## EXERCICE 2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y = 0\} \text{ et } G = \{(2a, -a, a), a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base, qui sera notée $(u_1, u_2)$.
2. Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base, qui sera notée $(u_3)$.
3. Démontrer que la famille $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $u_0 = (1,-1,1)$ dans cette base.
5. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant $G$.
6. Déterminer $F \cap G$.
7. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_4, u_5)$ avec $u_4 = (-2,-10,3)$ et $u_5 = (1,5,0)$.

## EXERCICE 3

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque $i$ de $[\![1, n-1]\!]$, on note $B_i$ l'événement : « le $i$-ème tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable $X$.
2. **Cas $n = 3$**. Déterminer la loi de $X$ lorsque $n = 3$.
3. **On revient au cas général.**
   (a) Pour tout $i$ de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Déterminer alors $P(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
   (c) Reconnaître la loi de $X$ et donner son espérance et sa variance.
4. On note $Y$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout $k$ de $X(\Omega)$, montrer que :
   $$P\Big([X = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$
   *On pourra introduire de nouveaux événements.*
   (b) En déduire que $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) Reconnaître la loi de $Y$ et donner son espérance et sa variance.
5. À la suite de l'expérience précédente :
   - si on a obtenu la boule 1, alors on lance $n$ fois une pièce amenant Pile avec la probabilité $p \in [0, 1]$ ;
   - sinon, on lance seulement 1 fois cette même pièce.

   On note alors $Z$ le nombre de Pile obtenus.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $P_{[Y=1]}(Z = k)$.
   (c) Déterminer $P_{[Y=0]}(Z = 0)$ et $P_{[Y=0]}(Z = 1)$.
   (d) Calculer alors la loi de $Z$.
   (e) Déterminer $E(Z)$.

6. **Simulations**

   (a) Recopier et compléter, en justifiant, le script `Scilab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire $X$.
   *Justification : on précisera la signification des variables n, u et X à chaque étape. On pourra ajouter des commentaires précédés de //.*

```
n = input('n = ')
u = grand(1,1,'uin',1,___)
X = 1
while u < n
    n = ___
    u = grand(1,1,'uin',1,___)
    X = ___
end
disp(X, 'X =')
```

   (b) Compléter les lignes 4 et 7 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par $X$, la valeur prise par $Y$.
   *Sur la copie, recopier seulement les lignes 4 et 7. Le reste du programme est supposé identique au précédent.*

```
1   n = input('n = ')
2   u = grand(1,1,'uin',1,***)
3   X = 1
4   Y = ___ // à compléter
5   while u < n
6       if u == 1 then
7           Y = ___ // à compléter
8       end
9       n = ***
10      u = grand(1,1,'uin',1,***)
11      X = ***
12  end
13  disp(X, 'X =')
14  disp(Y, 'Y =')
```

## EXERCICE 4

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On considère également la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

*On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $g(x)$.*

1. Justifier que $f$ admet une primitive $F$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (sans la calculer) et exprimer $g$ à l'aide de $F$.
2. En déduire que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.$$
3. (a) Soit $x \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer que $g(x) \geqslant \mathrm{e} \times \ln(2x)$.
   (b) Établir pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, l'inégalité $g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2x} \ln(2x)$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.
4. Déterminer les variations (précises) de $g$ et dresser le tableau de variation de $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $g$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
6. (a) Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel strictement positif, noté $u_n$, vérifiant
$$\int_1^{2u_n} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n.$$
   (b) Déterminer $u_0$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.