MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Mercredi 15 janvier 2020 – 4h

EXERCICE 1

Partie 1 : Puissances d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Partie 2 : Étude de deux suites

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \ \text{ et } \ b_{n+1} = 3b_n + 3^n.$$

2. Quelle instruction faut-il ajouter à la ligne 4 dans le programme encadré ci-dessous pour qu'il affiche la valeur de a_n ? On choisira, en justifiant, une réponse parmi les suivantes :

i) `a = 2 * a + 3^n`
ii) `a = 2 * a + 3^(i-1)`
iii) `a = 2 * a + 3^i`
iv) une autre instruction (à préciser).

```
1   n = input("n = ")
2   a = 2
3   for i = 1 : n
4       ...
5   end
6   disp(a)
```

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

4. Recopier et compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle calcule X_n puis retourne la valeur de a_n.

```
function a = Suite_a(n)
    A = [...]
    X = [...]
    for i = 1 : n
        X = ...
    end
    a = ...
endfunction
```

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

6. En déduire la valeurs de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On vérifiera que $b_n = n3^{n-1}$.

Partie 3 : Calcul des puissances d'une autre matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

8. Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P^{-1}A^nP$.

10. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n.

Partie 4 : Calcul d'une somme

On reprend la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la partie 2.

11. Montrer que pour tout entier naturel k, $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

12. Déduire des résultats de la partie 2 que

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.$$

EXERCICE 2

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si on pioche une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si on pioche une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Partie 1 : Urne du *n*-ième tirage

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note U_n l'événement « le n-ième tirage a lieu dans U_n ». On a $P(U_1) = 1$.

1. Déterminer $P(U_2)$.

2. Calculer $P(U_3)$.

3. Démontrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n).$$

4. Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2 : Nombre de boules blanches

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

5. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

6. (a) Donner les valeurs de
$$P_{[X_1=0]}(X_2=0),\quad P_{[X_1=0]}(X_2=1),\quad P_{[X_1=1]}(X_2=1),\quad P_{[X_1=1]}(X_2=2).$$
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Calculer $E(X_2)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner $X_n(\Omega)$ puis calculer $P(X_n=0)$.

8. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(X_{n+1}=1)=\frac{3}{4}P(X_n=1)+\frac{2}{3}P(X_n=0).$$

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n P(X_n=1)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1}=u_n+\frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.
   (c) Déterminer alors $P(X_n=1)$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ par :
$$\forall x \in D,\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$
ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0=3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)=\frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Justifier que f est continue sur D.
2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. Justifier que f est dérivable sur D et donner la valeur de $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur D.
5. (a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J à préciser.
   (b) On note g la fonction réciproque associée. Dresser le tableau de variation de g.
   (c) Montrer que g est dérivable en $-\frac{1}{\mathrm{e}}$ et calculer $g'\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
6. (a) Résoudre l'équation $f(x)=x$ d'inconnue x, pour $x \in D$.
   (b) Donner le signe de $f(x)-x$ lorsque $x \in D$.
7. (a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant \mathrm{e}$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.

8. (a) Montrer que :
$$\forall x \in [\mathrm{e}, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

   (b) En déduire que :
$$\forall x \in [\mathrm{e}, +\infty[, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

9. (a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|.$$

   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

   (c) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.