MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Vendredi 29 novembre 2019 – 4h

EXERCICE 1 – APPLICATIONS DIRECTES DU COURS

1. Soit $P = 2X^4 + 3X^3 - 10X^2 - 12X + 8 \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que -2 est racine double de P.
   (b) Factoriser P au maximum.
2. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(2X) - 2P'(X) \end{array}$.
   (a) Calculer $\varphi(P)$ pour $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer les éventuels antécédents du polynôme $4X^2 + 2X + 1$.
3. On considère l'application $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $h(n) = 5n - 2$. L'application h est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, on précisera la valeur qu'il faut poser pour $f(0)$.

EXERCICE 2 – SUITE RÉCURRENTE – INFORMATIQUE

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{9} u_n(u_n + 3)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 6$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Écrire un programme Scilab qui demande de saisir un entier $n \in \mathbb{N}$ puis calcule et affiche la valeur de u_n.
5. Écrire un programme Scilab qui calcule et affiche la valeur du premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

EXERCICE 3 – ANALYSE

PARTIE 1 : ENCADREMENT DE L'ARC-TANGENTE

Soient g et h les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x) = \text{Arctan}(x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = \text{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}.$$

1. Étudier les variations des fonctions g et h sur $[0,+\infty[$.

2. En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$: $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \text{Arctan}(x) \leqslant x$.

PARTIE 2 : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{Arctan}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$. *On pensera à utiliser la partie 1.*

4. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On précisera $f'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

5. (a) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u(x) = \dfrac{3x}{1+9x^2} - \text{Arctan}(3x)$.
   Étudier les variations de u et en déduire son signe.
   (b) En déduire les variations (précises) de f. Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$, en précisant la limite éventuelle de f en $+\infty$.

6. (a) Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   On note $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ la réciproque associée.
   (b) Étudier la continuité de φ sur J. Dresser le tableau de variation complet de φ.

PARTIE 3 : ÉTUDE D'UNE SUITE IMPLICITE

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, qui sera notée v_n.

8. Sur un graphique, tracer l'allure de la courbe de f et construire graphiquement v_1, v_2 et v_3.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(v_n) \geqslant f(v_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

10. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

EXERCICE 4 – PROBABILITÉS

On considère des protéines de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ constituées d'acides aminés de cystéine, d'aspartate et de glutamate que l'on désignera respectivement par les lettres C, A et G.
Une telle protéine peut être représentée par une séquence ordonnée de n lettres C, A, G.
Par exemple : CAGCAGAC est de longueur 8.

PARTIE 1 - PREMIÈRE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Dans cette partie, on considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit aléatoirement une protéine de longueur $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Un exemple.
   Pour cette question uniquement, on supposera que $n = 6$.
   (a) Combien y a-t-il de protéines de longueur 6 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une protéine qui contient au moins un C ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir une protéine qui contient deux C, deux A et deux G, dans n'importe quel ordre ?
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir une protéine qui ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques ?
2. On revient au cas général $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Combien y a-t-il de protéines possibles ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une protéine qui commence par la lettre C ?

PARTIE 2 - DEUXIÈME EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Dans la suite de cet exercice, on considère l'expérience aléatoire suivante :

On dispose d'une machine qui fabrique uniquement des protéines de longueur n, qui **commencent par la lettre C** et ne comportent **jamais deux lettres consécutives identiques**. La machine fabrique alors aléatoirement une de ces protéines.

Modélisation (admise)
L'univers est l'ensemble Ω_n des protéines de longueur n, qui commencent par la lettre C et ne comportent jamais deux lettres consécutives identiques.
On le munit de la **probabilité uniforme.**

3. Justifier que $\text{Card}(\Omega_n) = 2^{n-1}$.

On considère, sur l'univers Ω_n, les événements suivants :

- C_n l'événement : « la machine donne une protéine qui se termine par la lettre C » ;
- A_n l'événement : « la machine donne une protéine qui se termine par la lettre A » ;
- G_n l'événement : « la machine donne une protéine qui se termine par la lettre G ».

On pose $c_n = P(C_n)$, $a_n = P(A_n)$ et $g_n = P(G_n)$.

4. Cas $n = 1$: Justifier que $c_1 = 1$, $a_1 = 0$ et $g_1 = 0$.
5. Cas $n = 2$: Justifier que $c_2 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ et $g_2 = \frac{1}{2}$.
6. Cas $n = 3$: Déterminer c_3 , a_3 et g_3.

On souhaite maintenant déterminer c_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer que $c_n + a_n + g_n = 1$.
8. Justifier que $\text{Card}(C_{n+1}) = \text{Card}(A_n) + \text{Card}(G_n)$. En déduire que $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + g_n)$.
9. Justifier brièvement pourquoi on a : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + g_n)$ et $g_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n)$.
10. Montrer alors, par récurrence, que $a_n = g_n$.
11. À l'aide des questions précédentes, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+2} = \frac{1}{2}(c_{n+1} + c_n)$.
12. En déduire l'expression de c_n en fonction de n.