MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Vendredi 11 octobre 2019 – Durée : 4 heures

Consignes

- Encadrez les résultats et conclusions ;
- Numérotez les copies ;
- Toute réponse doit être justifiée ;
- Pas d'abbréviation, tout raisonnement doit être rédigé en français ;
- Vous traitez les exercices dans l'ordre de votre choix ;
- Pas de document, pas de calculatrice.

EXERCICE 1 – Applications directes du cours – Questions indépendanes.

1. Étudier la limite de $w_n = \ln(n) - n^2 + \sin(n)$ quand $n \to +\infty$.
2. Linéariser $\cos(3x)\sin^2(x)$.
3. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1. \end{cases}$$

4. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 2,\ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 4v_n. \end{cases}$$

5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{\exp(k)}$.

EXERCICE 2

On considère l'équation
$$(E) : z^3 - 3iz^2 - (1-i)z + 3 + 3i = 0$$

1. Démontrer que (E) admet une unique solution imaginaire pure, que l'on précisera.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^3 - 3iz^2 - (1-i)z + 3 + 3i = (z-3i)(z^2 - 1 + i).$$
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) que l'on donnera sous forme exponentielle.

EXERCICE 3

On considère la fonction $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x) - 2\tan(x)$

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variation complet.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $(E_n) : \sin(x) - 2\tan(x) = n$ admet une unique solution dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Celle-ci sera notée u_n. *On ne cherchera pas à la calculer.*
5. Que vaut u_0 ? Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $f(u_n)$?
6. Dans un repère orthogonal, tracer l'allure de la courbe de la fonction f. On fera apparaître les éléments de l'étude de f. Construire et placer, sur ce graphique, u_0, u_1, u_2 et u_3.

Nous allons maintenant étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) > f(u_n)$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que la limite ℓ appartient à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.
9. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\ell = -\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 4

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{\left(1+\sqrt{1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\cdots\left(1+\sqrt{n}\right)}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Calculer S_1 et S_2.
2. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n} \times u_n - \sqrt{n+1} \times u_{n+1}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 - \sqrt{n} \times u_n$.
4. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on notera S et donner un encadrement de S.
5. Déduire de ce qui précède que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLÈME

On fixe un réel λ tel que $0 < \lambda \leqslant 3$, et on définit la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda x(1-x) \end{array}.$$

Ici, λ est une constante.

On appelle suite logistique la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de cette suite selon les valeurs du paramètre λ.

Les parties 2, 3, 4 sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie 1.

Partie 1 - Préliminaires généraux

1. Déterminer le tableau de signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
   On fera trois cas : $\lambda > 1$, $0 < \lambda < 1$ et $\lambda = 1$.
   On notera α la solution non nulle de cette équation (le cas échéant).
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0,1]$ *(on demande une conclusion en français et la plus précise possible)* , puis tracer son tableau de variation sur $[0,1]$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

Partie 2 - Premier cas : $0 < \lambda \leqslant 1$

On suppose, dans cette partie uniquement, que $0 < \lambda \leqslant 1$.

4. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie 3 - Deuxième cas : $1 < \lambda \leqslant 2$

On suppose, dans cette partie uniquement, que $1 < \lambda \leqslant 2$.

6. Démontrer que, dans ce cas, $u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et que $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.
7. On suppose que $0 < u_1 \leqslant \alpha$.
   (a) Démontrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   (b) En déduire qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on précisera.
8. On suppose que $\alpha \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α.